Exercice 1

On munit $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme N définie par $\forall A\in E,\ N(A)=\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\operatorname{Sup}}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right\}$ (on admet que N est une norme sur E).

1. Montrer que N est une norme d'algèbre, c'est à dire :

$$\forall (A,B)\in\Big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\Big)^2,\ N(A\times B)\leq N(A)N(B).$$

2. Soit f l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall A\in E,\ f(A)=\operatorname{Tr}(A)$. Démontrer que l'application f est continue sur (E,N) et déterminer $|||f|||$.

correction L'application f est linéaire de (E,N) dans $(\mathbb{R},|\ |)$. Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in E$.

$$\begin{aligned}|f(A)|=|\operatorname{Tr}(A)|&\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_{i,i}|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}N(A)=nN(A).\end{aligned}$$

Ceci montre déjà que f est continue sur (E,N) et que $|||f|||\leqslant n$. De plus, si $A=I_n\neq 0$, $\dfrac{|f(A)|}{N(A)}=\dfrac{n}{1}=n$. Donc

$$\boxed{f\text{ est continue sur }(E,N)\text{ et }|||f|||=n.}$$

Exercice 2

Exercice 1. Pour tout polynôme réel P, écrit sous la forme $\mathrm{P}=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\mathrm{X}^k$, on note

$$\|\mathrm{P}\|=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1/2}|\mathrm{P}(x)|\quad\text{ et }\quad \mathrm{N}(\mathrm{P})=\left|\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\right|+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|a_k|}{k}$$

a. Prouver que $\|\|$ et N sont des normes sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
b. Montrer que la suite $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la norme $\|\|$ vers 1 pour la norme N.
c. *plus délicat* Construire une norme sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ pour laquelle la suite $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme X.

Corrigé partiel de l'exercice 1. b. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on trouve

$$\|\mathrm{X}^n-0\|=\frac{1}{2^n}$$

On observe que ceci tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui prouve que la suite $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme nul pour la norme ll. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on trouve

$$\mathrm{N}\left(\mathrm{X}^n-1\right)=\frac{1}{n}$$

Ceci tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, si bien que la suite $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme 1 pour la norme N.

c. On remarque que la somme des coefficients s'annule encore pour $\mathrm{X}^n - \mathrm{X}$, mais l'autre somme ne tend pas vers 0 à cause du coefficient a_1. Il suffit de modifier la deuxième somme pour qu'elle ne tienne plus compte de a_1. Cependant, pour qu'elle vérifie encore la propriété de séparation, il faut insérer a_0. Posons donc

$$\mathrm{M(P)} = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| + |a_0| + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}$$

On peut vérifier que M est une norme sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et pour tout entier $n \geqslant 2$, on trouve $\mathrm{M}\left(\mathrm{X}^n - \mathrm{X}\right) = 1/n$, ce qui donne la convergence souhaitée.

Exercice 3

Exercice III

1. Soit n un entier naturel. On considère la fonction de la variable réelle x définie par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x}}$.

(a) Etablir le tableau de variation de f_n sur l'intervalle $[0,1]$.

(b) Représenter sur un même graphique les graphes des fonctions f_0, f_1 et f_2.

2. Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on explicitera. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t'elle uniformément vers f sur $[0,1]$?

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx$$

3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone (on précisera le sens de monotonie) qui converge vers 0 .

4. Démontrer que

$$(n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3} dx$$

5. En déduire un équivalent pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Déterminer des nombres réels α_1, α_2 et α_3 tels que :

$$(n+2)(n+1)u_n = \alpha_1(n+2) + \alpha_2 + \alpha_3 \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5} dx$$

7. En déduire des nombres réels α et β qu'on explicitera tels que la suite (u_n) admette un développement de la forme :

$$u_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

8. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0,1]$. On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \int_0^1 x^n g(x) dx$$

Démontrer que pour tout entier naturel non nul k, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un développement de la forme :

$$v_n = \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots + \frac{\beta_k}{n^k} + o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

Exprimer les nombres β_1 et β_2 en fonction de g.

9. Soit h une fonction continue sur l'intervalle $[0,\ 1]$. Démontrer que la suite $\left(n\displaystyle\int_0^1 x^n h(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie et exprimer cette limite en fonction de h.

correction 2)

a) $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in[0,1], f_n'(x)=\dfrac{x^{n-1}(2n+(2n-1)x)}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$ donc sur $[0,1]$, f_0 est strictement décroissante et f_n est strictement croissante pour $n\geq 1$.

b)

c) (f_n) converge simplement vers f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=0$ si $x<1$ et $f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. f n'est pas continue sur $[0,1]$ bien que pour tout n, f_n est continue il ne peut pas y avoir convergence uniforme.

4) $\forall x\in[0,1]$, la suite $(f_n(x))$ est décroissante donc par croissance de l'intégrale (u_n) est décroissante. De plus

$$\left|\int_0^1\frac{x^n}{(\sqrt{1+x})}\mathrm{d}x\right|\leq\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\leq\frac{1}{n+1}.$$

Donc (u_n) converge vers 0.

5)Le résultat annoncé est obtenu par intégration par parties en intégrant x^n et en dérivant $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

6) Par une nouvelle majoration (inégalité forte de la moyenne), on a

$$\left|\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3}\mathrm{d}x\right|\leq\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{d}x\leq\frac{1}{n+2}.$$

On en déduit donc que $u_n\sim\dfrac{1}{2n}$.

7) On répète l'intégration par parties en intégrant de nouveau le polynôme et en dérivant $(1+x)^{-\frac{3}{2}}$. On obtient alors $(n+2)(n+1)u_n=\dfrac{n+2}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}^3}+\dfrac{3}{4}\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+2}}{(1+x)^{\frac{5}{2}}}dx$.

Ainsi $\alpha_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\alpha_2=\dfrac{1}{4\sqrt{2}},\alpha_3=\dfrac{3}{4}$

8) Après développement asymptotique, on obtient $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{2}n}-\dfrac{3}{4\sqrt{2}n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\beta=-\dfrac{3}{4\sqrt{2}}$.

9)Par intégration par parties généralisée, en intégrant k fois x^n et en dérivant g on obtient

$$\int_0^1 x^n g(x)dx=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j g^{(j)}(1)}{(n+1)\dots(n+j+1)}+o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

Chaque fraction rationnelle $\dfrac{(-1)^j g^{(j)}(1)}{(n+1)\dots(n+j+1)}$ possède un développement asymptotique. En regroupant les termes selon les puissances de n, on obtient bien

$$v_n=\sum_{j=1}^{k}\frac{\beta_j}{n^j}+o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

où $\beta_1=g(1),\beta_2=g'(1)-g(1)$.

10)Posons $w_n=\displaystyle\int_0^1 x^n g(x)dx$. La question (9) nous permet d'affirmer que si la suite a une limite, c'est $h(1)$. Par convergence dominée, (w_n) converge vers $0.(n+1)w_n-h(1)=(n+1)\displaystyle\int_0^1 x^n(h(x)-$

$h(1))dx$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha > 0$ tel que $x \in [1-\alpha, 1] \Rightarrow |h(x) - h(1)| < \varepsilon$. Alors $|(n+1)w_n - h(1)| \leq (n+1)\displaystyle\int_0^{1-\alpha} x^n(h(x) - h(1))dx + (n+1)\int_{1-\alpha}^1 x^n \varepsilon dx \leq 2\|h\|_\infty (1-\alpha)^{n+1} + \varepsilon$. Donc $nw_n \to h(1)$.