

1 Pour Mardi

On pose $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} a_k.$$

a) En admettant que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est non nul; calculer

$$\forall x \in]-R, R[, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

b) Calculer les a_n et préciser la valeur de R .

c) Donner un équivalent de la suite (a_n) .

2 Pour Mercredi

Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E .

a) Montrer que $\bar{F}$ est un sous espace vectoriel de E .

b) Soit H un hyperplan de E c'est à dire le noyau d'une forme linéaire φ non nulle. Soit $a \notin \text{Ker}(\varphi)$. Montrer que

$$H \oplus \text{Vect}(a) = E.$$

c) Montrer qu'un hyperplan est soit fermé soit dense. Pour cela

i) Si $H = \bar{H}$ que peut on conclure ?

ii) Sinon il existe $x \in \bar{H} \setminus H$, décomposer x dans la somme directe et conclure.

3 Pour Jeudi

Soit $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$ munie de la norme infinie.

Déterminer si les sous-ensembles de E suivants sont des parties fermées ou non

$A = \{\text{suites croissantes}\}$, $B = \{\text{suites qui convergent vers } 0\}$

4 Pour Vendredi

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

a) Montrer que $\mathbb{D} = \{p2^{-n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que si f s'annule de 0 et en 1 alors $f = 0$.

les étapes sont f est impaire puis f s'annule sur $\mathbb{N}$ puis f s'annule sur $\mathbb{D}$.

c) retour au cas général, construire à partir de f une fonction g qui vérifie la même propriété mais telle que $g(0) = g(1) = 0$. Conclure que f est une fonction affine.