Une démonstration d'un théorème de Weierstrass Soit n un entier naturel.

A) On pose $a_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$ et on considère la fonction φ_n définie sur $[-1, 1]$ par

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{a_n} (1-x^2)^n.$$

1) Calculer $\int_0^1 t(1-t^2)^n dt$. En déduire que $a_n \geq \frac{1}{n+1}$.

2) Soit $\alpha \in]0, 1[$. montrer que (φ_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[\alpha, 1]$.

B) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

1) Montrer que f est uniformément continue.

On pose $f_n(x) = \int_{-1}^1 f(x-t)\varphi_n(t)dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que f_n est une fonction polynomiale sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

3) Montrer que $f(x) - f_n(x) = \int_{-1}^1 (f(x)f(x-t))\varphi_n(t)dt$.

4) En déduire que (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

C) Soit f une fonction réelle continue nulle en dehors de $[-a, a]$

Montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes.

D) Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes.