Pour mardi

Soit E un espace vectoriel normé.

a) Soit A une partie non vide de E. Montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue sur E.

b) Soit K un compact non vide inclus dans un ouvert U. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in K\ \mathcal{B}(x, \alpha) \subset U$.

Mercredi

On répète successivement et indépendamment une expérience qui a la même probabilité de réussir ou d'échouer. Pour $n \geq 2$ on définit

$A_n =$ On obtient deux succès consécutifs lors des n première expériences

$B_n =$ On obtient le premier couple de succès consécutifs au rang $n-1$ et n

Enfin on pose $p_n = P(B_n)$ et $p_1 = 0$.

a) Calculer p_2, p_3 et p_4.

b) Pour $n \geq 2$, vérifier

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k \text{ et } p_{n+3} = \frac{1}{8}\Big(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\Big).$$

c) En déduire une relation entre p_{n+3}, p_{n+2} et p_n valable pour $n \geq 1$.

d) Exprimer le terme général de la suite p_n. (ou pas car un peu pénible)

Pour Jeudi

Hyper classique attention il faut utiliser l'inégalité $(1-x) \leq e^{-x}$

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun ne soit réalisé est inférieure à :

$$exp\Big(-\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\Big)$$

Pour vendredi

(voir écrit ccinp)

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et pour $s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}.$$

a) Pour quels valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, la famille (λn^{-s}) définit elle une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$?

b) Pour p un nombre premiers, on pose $A_p = p\mathbb{N}^*$. Montrer que les A_p sont mutuellement indépendants pour la loi précédente.

c) Démontrer que
$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^s}$.

d) La famille $(\frac{1}{p})_{p\in\mathbb{P}}$ est elle sommable ?