1 Pour Mardi

On lance un dé à six faces équilibrées jusqu'à obtenir un 6.

1) Justifier que le jeu s'arrête presque surement.

On considère l'événement E : on n'a obtenu que des chiffres pairs.

2) Justifier que $P(E) \geq \frac{1}{6}$.

3) On note, pour $n \in \mathbb{N}$, A_n l'événement : on obtient le premier 6 au lancer n. Justifier que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système quasi complet d'événement.

4) En déduire la probabilité de E. (on trouve $\frac{2}{7}$.)

2 Pour Mercredi ccinp 2023

Exercice 2

Soit $p \in]0,1[$, $q = 1 - p$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé et suivant la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(Y = k) = pq^k.$$

On considère les variables aléatoires Z et T définies par $Z = \sup(X,Y)$ et $T = \inf(X,Y)$.

Q4. Pour tout couple (m,n) d'entiers naturels, déterminer $P((Z = m) \cap (T = n))$ en distinguant trois cas : $m > n$, $m < n$ et $m = n$.

Q5. En déduire la loi de la variable aléatoire Z.

3 Pour Jeudi

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p et q. Calculer $P(X < Y)$.
2. On considère la matrice. :

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & -X \end{pmatrix}$$

Quelle est la probabilité que la matrice soit diagonalisable ?

4 Pour Vendredi

Un pion se délace sur des cases numérotées par des entiers naturels. Initialement, il se trouve sur la case 0 et à chaque instant, il se déplace d'un nombre strictement positifs de case. On note Y_i la variable aléatoire donnant le nombre de cases parcourues lors de la i-ième étape. On suppose que les Y_i sont indépendantes et suivent la même loi. On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

qui donne la position du pion à l'instant n, et

$$f_i = P(Y_1 = i) \text{ et } f(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i t^i.$$

on note E_k l'événement : *le pion atteint la case* k et $u_k = P(E_k)$.

b) Décrire l'événement E_k à l'aide des variables aléatoires S_n.

c) Calculer $P\Big(E_k \cap \{Y_1 = j\}\Big)$ pour $1 \leq j \leq k$.

d) En déduire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \sum_{j=1}^{k} u_{k-j} f_j.$$

e) Justifier la définition de

$$u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k,\ \text{pour } t \in [0,1]$$

et montrer que $u(t) = \frac{1}{1-f(t)}$.

f) Calculer u dans le cas où $Y_1 - 1$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et en déduire les u_k.

g) *Facultatif* On suppose que Y_1 prend un nombre fini de valeurs et que les entiers k tel que $P(Y_1 = k) \neq 0$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que (u_k) tend vers $\frac{1}{E(Y_1)}$