Une démonstration d'un théorème de Weierstrass Soit n un entier naturel.

A) On pose $a_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n \mathrm{d}t$ et on considère la fonction φ_n définie sur $[-1,1]$ par $\varphi_n(x) = \frac{1}{a_n}(1-x^2)^n$.

1) Calculer $\int_0^1 t(1-t^2)^n \mathrm{d}t$. En déduire que $a_n \geq \frac{1}{n+1}$.

On trouve $\int_0^1 t(1-t^2)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{2(n+1)}$, d'où

$$a_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t \geq 2\int_0^1 t(1-t^2)^n \mathrm{d}t \geq \frac{1}{n+1}.$$

2) Soit $x \in \alpha \in]0,1[$.

$$\mid \varphi_n(x) \mid \leq \frac{(1-\alpha^2)n}{a_n} \leq (n+1)(1-\alpha^2)^n$$

donc

$$||\varphi||_\infty^{[\alpha,1]} \leq (n+1)(1-\alpha^2)^n \to 0$$

Il y a convergence uniforme sur $[\alpha, 1]$ vers 0.

B) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

1) D'après le théorème de Heine, f est uniformomément continue sur $[-1,1]$ qui est un segment. Fixons $\epsilon > 0$, on dispose de $\eta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [-1,1]^2$, $|x-y| \leq \eta \Longrightarrow |(fx) - f(y)| \leq \epsilon$.

Posons $\tilde{\eta} = \mathrm{Min}(\eta, \frac{1}{2}$ alors si $|x-y) \leq \tilde{\eta}$ ceci implique que

Soit $(x,y) \in [-1,1]^2$ et on est content, soit $(x,y) \in]-\infty, -\frac{1}{2}]$ (ou $(x,y) \in]\frac{1}{2}, +\infty[$ faire un dessin au besoin pour s'en convaincre) mais alors $|f(x) - f(y)| = 0 \leq \epsilon$.

Donc $\tilde{\eta}$ convient.

2) Montrer que f_n est une fonction polynomiale sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

On a $f_n(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(u)\varphi_n(x-u)\mathrm{d}u$ et $\varphi_n(x-u) = \sum_{k=0}^{2n} a_k(u)x^k$.

donc

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{2n}\Big(\int_{x-1}^{x+1} f(u)a_k(u)\mathrm{d}u\Big)x^k.$$

et

$$\int_{x-1}^{x+1} f(u)a_k(u)\mathrm{d}u = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} f(u)a_k(u)\mathrm{d}u}$$

car f est nulle en de hors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, donc f_n est polynomiale.

3) On a

$$\int_{-1}^{1} \varphi_n(t)\mathrm{d}t = 1$$

(c'est pour cela que l'on introduit φ_n, l'égalité en découle.

4) Question récolte

Soit $\epsilon > 0$ on dispose de $\eta > 0$ de l'uniforme continuité.

$$|f_n(x)-f(x)| \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} \mid f(x)-f(x-y) \mid \varphi_n(t)\mathrm{d}t + 4||f||_\infty \int_\alpha^1 \varphi_n \leq \epsilon + 4||f||_\infty \int_\alpha^1 \varphi_n.$$

Or $\displaystyle\int_\alpha^1 \varphi_n$ tend vers 0 quand n tend vers ∞, on dispose de N tel que pour $n \geq N$

$$4||f||_\infty \int_\alpha^1 \varphi_n \leq \epsilon.$$

finalement

$$\forall n \geq N, \mid f(x) - f_n(x) \mid \leq 2\epsilon.$$

(et ce grand N a été trouvé indépendant de x.)

C) On applique la question précédente à $g : x \mapsto f(2ax)$ définie sur $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}$ (et nulle ailleurs.)

D) Il suffit d'inclure $[a; b]$ dans un segment symétrique et en prolongeant f par la fonction nulle.