1

On peut refaire un exercice déjà vu mais avec le cours sur les familles sommables

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières. Montrer que X admet une espérance si et seulement si $\sum_{n\geq} P(X \geq n)$ est convergente. Montrer qu'en cas d'existence

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k).$$

On pourra introduire :

$$U_{i,j} = P(X = j) \text{ si } i \leq j \quad 0 \quad \text{ sinon.}$$

2

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi d'une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit aussi N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes des précédentes. On étudie $S = X_1 + \cdots + X_N$.

1. Justifier que S est une variable aléatoire à valeurs naturelles.
2. Établir $G_S(t) = G_N\big(G_X(t)\big)$ pour tout t de $[-1\,;1]$.
3. On suppose que les variables N et X admettent chacune une espérance finie. Établir l'*identité de Wald* : $\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(N)\mathrm{E}(X)$.

3 Galton Watson épisode 2

On considère une famille $(X_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ de variables aléatoires de même loi X indépendantes et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires définies par récurrence par

$$Z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_{j,n+1}.$$

On définit $p_n = P(X = n)$ et $m = E(X)$ que l'on suppose finie.

Concrètement $(Z_n)_{n\in N}$ modélise l'évolution d'une population dont, à chaque instant n, les individus meurent en donnant naissance (de manière indépendante) à des nombres d'enfants suivant la loi X. On suppose que X admet une espérance finie m.

On note G_X la fonction génératrice de X, on suppose que $P(X = 1) + P(X = 0) < 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $i > 0$, la variable Z_n est indépendante de $X_{i,n}$.
   On veut calculer $P(\exists n \in N, Z_n = 0)$. On note
   $$\pi_n = P(Z_n = 0) \text{ et } \pi_\infty = P(\exists n \in N, Z_n = 0)$$
   π_∞ représente la probabilité d'extinction.
2. Montrer que $\pi_\infty = \lim_{n\to+\infty} \pi_n$.
3. Montrer que si $p_0 = 1$ alors $\pi_{infty} = 0$ et interpréter ce résultat.
4. Si $p_0 = 1$ montrer que $\pi_{infty} = 1$ er interpréter ce résultat.
   On suppose désormais $p_0 \in]0, 1[$.
5. (a) $G_n(0) = \pi_n$ (et oui).
   (b) Montrer que G_X est strictement croissante sur]0,1[, dérivable sur $[0, 1]$.
   (c) G est convexe sur $]0, 1[$.
   (d) G est strictement convexe sur $]0, 1[$ ssi $p_0 + p_1 < 1$
   (e) Montrer que $E(X) = 1$ ssi $p_0 + p_1 = 1$. Pour cela on remarquera et on démontrera que :
   $$E(X) = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)p_k$$
   (strictement convexe c'est la $G" > 0$.)

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note G_{Z_n} la fonction génératrice de Z_n (définie sur $[0, 1]$). Montrer que $G_{Z_{n+1}} = G_{Z_n} \circ G_X$. En déduire $E(Z_n)$.

6. Montrer que π_∞ est le plus petit point fixe de G_X sur $[0,1]$ (point fixe c'est $f(a)=a$.)
7. Montrer que si $m \leq 1$ alors $\pi_\infty = 1$ et si $m > 1$ alors π_∞ est l'unique point fixe de G sur $]0,1[$.
   Faire des dessins.

4

1. Écrire une fonction `S(n,p)` qui simule une variable aléatoire $S_n = Y/n$, où Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. En déduire une fonction `test(n,p)` qui affiche les courbes interpolant les points (k, S_k), puis
$$\left(k, p - \sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right) \text{ et } \left(k, p + \sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right).$$
   Que remarque-t-on ?
2. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1\,;1]$. Montrer que
$$\mathrm{e}^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)\mathrm{e}^{t}.$$
3. On considère une variable aléatoire X telle que $|X| \leq 1$ et $\mathrm{E}(X) = 0$. Montrer que $\exp(tX)$ est d'espérance finie et
$$\mathrm{E}\big(\exp(tX)\big) \leq \operatorname{ch} t \leq \exp(t^2/2).$$
4. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes telles que, pour tout i, $|X_i| \leq a_i$. On pose
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$
   Montrer
$$\mathrm{E}\big(\exp(tS)\big) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$
   Soit $\varepsilon > 0$. Montrer
$$\mathrm{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$
5. En choisissant une bonne valeur de t, montrer
$$\mathrm{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right).$$
6. Commenter le résultat observé à la première question.

5

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes réelles discrètes, de même loi, d'espérance nulle et prenant un nombre fini de valeurs. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. Fixons un réel $\epsilon > 0$. Posons
$$h^+(\epsilon) = \sup\{\epsilon t - \ln(E(e^{tX_1}), t \in \mathbb{R}^+\}$$
   Remarque du gentil examinateur : c'est la première question donc elle ne doit pas être difficile , considérer $t \mapsto t - \ln(E(e^{tX_1})$ en dérivant sans trop justifier (l'hypothèse X prend un nombre fini de valeurs simplifie les choses). Puis faire un dessin de la situation.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(\dfrac{S_n}{n} \geq \epsilon) \leq \exp(-nh^+(\epsilon))$.
3. Montrer que pour tout couple (nm) d'entiers naturels non nuls
$$P(S_n \geq n\epsilon)P(X_{n+1} + X_{n+2} + \cdots + X_{n+m} \geq m\epsilon) \leq P(S_{n+m} \geq (n+m)\epsilon).$$

4. On admet le lemme suivant auquel on ne comprend pas grand chose :
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $[0,1]$ telle que pour tout couple (p,q) d'entiers strictement positifs
   $$u_{p+q}^{p+q} \leq u_p^p u_q^q$$
   alors la suite (u_n) converge.
   Montrer que la suite $\left(\mathrm{P}\big(\frac{S_n}{n} \geq \epsilon\big)\right)^{\frac{1}{n}}$ converge vers un réel l tel que
   $$l \leq \exp(-h^+(\epsilon)).$$

6

On souhaite modéliser le nombre d'arrivées de « clients » dans un « service » durant un laps de temps T.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $s,t \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq s \leq t$, on note $A(n,s,t)$ l'événement

« il arrive n clients dans l'intervalle de temps de $[s\,;t[$ »

On admet l'existence d'un espace probabilisé permettant d'étudier la probabilité de cet événement en supposant :
(H1) pour tous $m,n \in \mathbb{N}$ et tous réels $0 \leq r \leq s \leq t$, les événements $A(m,r,s)$ et $A(n,s,t)$ sont indépendants ;
(H2) la probabilité de l'événement $A(n,s,t)$ ne dépend que de n et du réel $t-s$. On note
$$p_n(t) = \mathrm{P}\big(A(n,0,t)\big).$$
(H3) la fonction p_0 est continue et $p_0(0) = 1$;
(H4) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) = 1.$$
(H5) on a le développement asymptotique
$$1 - p_0(t) - p_1(t) \underset{t\to 0^+}{=} \mathrm{o}\big(p_1(t)\big).$$

Cette dernière hypothèse signifie que, durant un laps de temps minime, la probabilité d'arrivée d'au moins deux clients est négligeable devant la probabilité d'arrivée d'un seul client.

1. Justifier que la fonction p_0 est décroissante et que
   $$\forall s,t \in \mathbb{R}_+, p_0(s+t) = p_0(s)p_0(t).$$
2. Montrer que p_0 est à valeurs strictement positives et qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ vérifiant
   $$\forall t \in \mathbb{R}_+, p_0(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$
3. Justifier
   $$p_1(t) \underset{t\to 0^+}{=} \lambda t + \mathrm{o}(t) \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, p_n(t) \underset{t\to 0^+}{=} \mathrm{o}(t).$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer
   $$\forall s,t \geq 0, p_n(s+t) = \sum_{k=0}^{n} p_k(s)p_{n-k}(t).$$
   En déduire que la fonction p_n est dérivable et
   $$\forall t \geq 0, p_n'(t) = \lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t)).$$
5. Obtenir l'expression de $p_n(t)$ (on pourra étudier $q_n(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}p_n(t)$).
6. On note X la variable aléatoire déterminant le nombre de « clients » arrivant durant le laps de temps $T > 0$. Déterminer la loi de X. Comment interpréter le paramètre λ ?