

Le lemme de Borel Cantelli d'après oral ccinp 2016

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants. Posons $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$ et

$$B = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k.$$

Considérons $u_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Démontrer que $(u_n)_n$ est convergente de limite $\mathbb{P}(B)$.

✖ Ce résultat est dans la colonne de droite du programme, on peut considérer que c'est du cours.

2. Démontrer que les séries $\sum \ln(1 - \mathbb{P}(A_n))$ et $\sum \mathbb{P}(A_n)$ sont de même nature.

3. Dédurre des deux questions précédentes que $\mathbb{P}(B) < 1$ si et seulement si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. (On pourra considérer $\bar{A}_n$.)

4. (***) Soit $I = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

Démontrer que $\mathbb{P}(I) = 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(B) < 1$, et que $\mathbb{P}(I)$ ne peut valoir que 0 ou 1 (c'est la loi du zéro-un de Borel).

Première application

Marche au hasard sur $\mathbb{Z}$. Soit $p \in]0, 1[$. On considère une particule positionnée sur la droite réelle au point d'abscisse 0. A chaque instant, elle choisit d'avancer d'une unité (à droite) avec la probabilité p et de reculer d'une unité (à gauche) avec la probabilité $q = 1 - p$. On note S_n l'abscisse de la position de la particule après n instants et p_n la probabilité de l'événement $(S_n = 0)$ (la particule est retournée à sa position initiale).

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{2n} = \binom{2n}{n} (pq)^n$. Justifier que $4pq < 1$ sauf si $p = \frac{1}{2}$.

2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} p_{2n}$ converge si $p \neq \frac{1}{2}$ et diverge si $p = \frac{1}{2}$.

3. A l'aide du théorème de Borel-Cantelli, montrer que si $p \neq \frac{1}{2}$, l'événement la particule revient à sa position initiale une infinité de fois est quasi-impossible (i.e. son événement contraire est presque sûr). Peut-on conclure lorsque $p = \frac{1}{2}$?

Deuxième application

k -ième succès. On considère une pièce telle que la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$ et face est $q = 1 - p$. Pour tout couple $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note A_n l'événement : le k -ième pile est obtenu au n -ième lancer. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ puis $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Qu'en déduit-on par le lemme de Borel-Cantelli?