**Le lemme de Borel Cantelli d'après oral ccinp 2016**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants. Posons $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ et $B = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$.

Considérons $u_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. La suite des ensembles $B_n$ est croissante pour l'inclusion, le théorème de continuité croissante donne la conclusion.

Ce résultat est dans la colonne de droite du programme, on peut considérer que c'est du cours.

2. 2. Si la suite $P(A_n)$ ne converge pas vers 0 les deux suites sont divergentes. Si $P(A_n)$ converge vers 0, par comparaison de séries dont les termes sont de signes constants, et

$$\ln\big(1 - P(A_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} -P(A_n),$$

les séries sont donc de même nature.

remarque on peut montrer qu'en fait $P(A_n)$ tend vers 0 car les $(A_i)$ sont mutuellement indépendants. 3. On a :

$$P(B_n) = 1 - P(\bar{B}_n) = 1 - P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} \bar{A}_k\Big)$$

pas indépendance des $A_k$ les $\bar{A}_k$ le sont aussi, donc

$P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} \bar{A}_k\Big) = \prod_{k=1}^{n} P(\bar{A}_k) = \prod_{k=1}^{n} \Big(1 - P(A_k)\Big)$

$P(B) < 1$ ssi $u_n$ converge vers $l < 1$ ssi $P(\bar{B}_n)$ converge vers $(1-l) > 0$

Or $\ln(P(\bar{B}_n)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 - P(A_n))$

$P(B) < 1$ ssi la série $\sum \ln(1 - P(A_n))$ converge ssi $\sum P(A_n)$ converge.

4. $(\star\star\star)$ Soit $I = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

Supposons que $P(B) < 1$ alors la série $\sum P(A_n)$ est convergente , or

$$P\Big(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\Big) \le \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$$

reste d'une série convergente donc qui tend vers 0. Donc $P\Big(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\Big)$ tend vers 0, or $\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ sont décroissants par continuité décroissante

$$P(I) = 0$$

Supposons que $P(B) = 1$ alors la série $\sum P(A_n)$ est divergente vers $+\infty$ car c'est une série à termes positifs. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ (attention les séries divergent délicat à manipuler mais pas impossible avec le nouveau programme)

De plus

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=n}^{N} \bar{A}_k\right)$$
$$= 1 - \prod_{k=n}^{N}(1 - P(A_n))$$

Par indépendance.
or $(1-u) \leq e^{-u}$ pour $u \geq 0$
$\prod_{k=n}^{N}(1 - P(A_n)) \leq exp\left(-\sum_{k=n}^{N} P(A_k)\right)$
Finalement

$$1 \geq P\left(\bigcap_{k=n}^{N} A_k\right) \geq 1 - exp\left(-\sum_{k=n}^{N} P(A_k)\right)$$

Or la série diverge donc

$$\lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{N} A_k\right) = 1$$

Mais par continuité croissante $P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = 1$

et enfin par continuité décroissante $P(I) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$ donc $P(I) = 1$

**Première application**

Marche au hasard sur $\mathbb{Z}$. Soit $p \in ]0,1[$. On considère une particule positionnée sur la droite réelle au point d'abscisse 0. A chaque instant, elle choisit d'avancer d'une unité (à droite) avec la probabilité $p$ et de reculer d'une unité (à gauche) avec la probabilité $q = 1 - p$. On note $S_n$ l'abscisse de la postion de la particule après $n$ instants et $p_n$ la probabilité de l'événement $(S_n = 0)$ (la particule est retournée à sa position initiale).

1. La particule est revenue à sa place elle a fait autant de déplacement à gauche qu'à droite, donc un nombre pair de déplacements , il y a $\binom{2n}{n}$ déplacements distincts qui ramènent à l'origine (on choisit les gauches et plus de choix pour les droites par ex) , chaque déplacement a la même probabilité d'advenir. D'où le résultat/
2. Un équivalent à l'aide de striling permet de conclure comme la série est à termes positifs.
3. si $p \neq \frac{1}{2}$, On note $A_n = (S_n = 0)$ , Soit $\omega$ telle que la particule revient une infinité de fois alors

$$w \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$$

Les $S_n = 0$ ne sont pas indépendants mais dans ce sens de Borel Cantelli on n'a pas besoin de l'indépendance

$$0 \leq P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k) = \lim_{n \to +\infty} P(\bigcup_{k \geq n} A_k) \text{ continuité décroissante}$$

Mais $P(\bigcup_{k \geq n} A_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_n)$ reste d'une série convergente . Donc $P(I) = 0$ presque surement la particule ne revient qu'un nombre fini de fois.

Peut-on conclure lorsque $p = \frac{1}{2}$ ?

La réponse est non car les $S_n = 0$ ne sont pas indépendants ( a priori ) et dans ce sens on a besoin de l'indépendance. L'énoncé ccinp étudie le cas de l'indépendance pour simplifier l'énoncé.

**Deuxième application**

$k$-ième succès. La loi du k-ième succès est bien connue : le dernier lancer est pile, on place $(k-1)$ succes avant sur les $(n-1)$ places

$\forall n \geq k : P(A_n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$.

donc la série est convergente et sans hypothèse d'indépendance on déduit

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} (\bigcup_{i=n}^{+\infty} A_i)\right) = 0.$$