Exercice 4

Un fabricant de produits d'entretien pour machines à café fournit deux types de produits : un produit détartrant (produit A) et un produit dégraissant (produit B). Ce fabricant vend les produits conditionnés uniquement en boîtes contenant à la fois un produit A et un produit B. Cependant, pour rendre service à ses clients qui n'ont besoin que d'un seul produit, un commerçant accepte de vendre séparément les produits.

Pour la suite, on suppose que chaque client qui se présente chez le commerçant n'effectue qu'un seul achat. On suppose également que les choix (du produit A ou B) des clients sont indépendants. On fait également l'hypothèse qu'il ne reste aucune boîte entamée au début de la journée.

On considère que chaque client qui se présente chez ce commerçant achète le produit A avec la probabilité $p \in]0,1[$ et le produit B avec la probabilité $1-p$. On note X (respectivement Y) le nombre de produits A (respectivement de produits B) vendus au cours de la journée. On notera $Z = \max(X,Y)$.

1. On considère une journée où 4 clients se sont présentés. Déterminer la loi de X, la loi de Y et les espérances de ces deux variables aléatoires. Déterminer la loi de Z. Que représente cette variable aléatoire ?

On suppose maintenant que le nombre de personnes se présentant chez le commerçant durant une journée est une variable aléatoire réelle N suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

2. Soit n un entier naturel. Quelle est la loi de X sachant que l'évènement $[N=n]$ est réalisé ?
3. Déterminer la loi conjointe du couple (X,N).
4. En déduire la loi de X. Donner sans calcul les valeurs de $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.
5. Démontrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
6. En utilisant la relation $N = X+Y$, calculer $\operatorname{Cov}(X,N)$.
7. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$S(k,x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!}$$

Exprimer $\mathbf{P}(Z \leq k)$ en fonction de $\lambda, S(k,\lambda p)$ et $S(k,\lambda(1-p))$.

8. On utilise dans cette question le langage de programmation PYTHON.

(a) Définir la fonction S(k, x) qui calcule $S(k,x)$ à partir des valeurs de k et x données.

(b) On suppose dans cette question que $p = \dfrac{1}{2}, \lambda = 10$ et que le commerçant constate au début de la journée qu'il lui reste exactement 5 boîtes, aucune n'étant entamée. Écrire les instructions permettant d'afficher la probabilité que le commerçant tombe en rupture de stock au cours de la journée.