Exercice 4.

1. Les choix des clients sont indépendants, chaque choix suit une loi de Bernoulli de paramètre p et X compte le nombre de ventes. Cela signifie que X suit une loi binomiale de paramètre $(4,p)$: $\boxed{X \sim \mathcal{B}(4,p) \text{ et } E(X) = 4\,p}$.

   De même, $\boxed{Y \sim \mathcal{B}(4,1-p) \text{ et } E(Y) = 4\,(1-p)}$.

   Le couple (X,Y) prend ses valeurs dans $\{(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}$ donc Z prend ses valeurs dans $[\![2,4]\!]$ et avec $P\big((X=k)\cap(Y=4-k)\big) = P(X=k)$, on obtient
$$P(Z=2) = P(X=2,Y=2) = P(X=2) = \binom{4}{2} p^2\,(1-p)^2 = 6\,p^2\,(1-p)^2\,;$$
$$P(Z=3) = P\big((X=1,Y=3)\cup(X=3,Y=1)\big) = P\big((X=1)\cup(X=3)\big)$$
$$P(Z=3) = P(X=1)+P(X=3) = \binom{4}{1} p\,(1-p)^3 + \binom{4}{3} p^3\,(1-p)$$
$$P(Z=3) = 4\,p\,(1-p)\,[(1-p)^2+p^2] = 4\,p\,(1-p)\,(2\,p^2-2\,p+1)\,;$$
$$P(Z=4) = P(X=0)+P(X=4) = (1-p)^4+p^4.$$
$$\boxed{Z(\Omega) = [\![2,4]\!],\ P(Z=2) = 6\,p^2\,(1-p)^2,\ \ P(Z=3) = 4\,p\,(1-p)\,[(1-p)^2+p^2] \text{ et } P(Z=4) = (1-p)^4+p^4}.$$
$$\boxed{Z \text{ est le nombre de boites entamées en fin de journée, lorsqu'aucune n'était entamée le matin}}.$$

2. Comme déjà dit ci-dessus, $\boxed{X_{|N=n} \sim \mathcal{B}(n,p)}$.

3. On a $\boxed{(X,N)(\Omega) = \{(n,k)\in\mathbb{N}^2,\ k \leqslant n\}}$ et pour tout (n,k) dans $(X,N)(\Omega)$,
$$P(N=n,\ X=k) = \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k} \times \mathrm{e}^{-\lambda}\,\tfrac{\lambda^n}{n!}$$
$$\boxed{\text{pour tout } (n,k) \text{ dans } (X,N)(\Omega),\ P(N=n,\ X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\tfrac{(\lambda\,p)^k}{k!} \times \tfrac{[\lambda\,(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!}}\ .$$

4. Avec le système complet d'événements $(X=n)_{n\in\mathbb{N}}$ et
$$(X=k)\cap(N=n) = \emptyset \text{ pour } k>n,$$
   on a pour tout k dans $\mathbb{N}$:
$$P(X=k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(X=k,\ N=n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\tfrac{(\lambda\,p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \tfrac{[\lambda\,(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$P(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\tfrac{(\lambda\,p)^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{[\lambda\,(1-p)]^j}{(j)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\tfrac{(\lambda\,p)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{\lambda\,(1-p)}$$
$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \ P(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda\,p}\,\tfrac{(\lambda\,p)^k}{k!} \,:\, X \sim \mathcal{P}(\lambda\,p),\ E(X) = V(X) = \lambda\,p}\ .$$

5. De même, on a $Y \sim \mathcal{P}\big(\lambda\,(1-p)\big)$.

   Alors, pour tout (k,ℓ) dans $\mathbb{N}^2$, en posant $n = k+\ell$ on a d'une part
$$P(X=k,Y=\ell) = P(X=k,N=n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\tfrac{(\lambda\,p)^k}{k!}\,\tfrac{[\lambda\,(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!}$$
   et d'autre part, avec $\ell = n-k$,
$$P(X=k)\times P(Y=\ell) = \mathrm{e}^{-\lambda\,p}\,\tfrac{(\lambda\,p)^k}{k!} \times \mathrm{e}^{-\lambda\,(1-p)}\,\tfrac{[\lambda\,(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!},$$
   ce qui donne $P(X=k,Y=\ell) = P(X=k)\times P(Y=\ell)$ pour tout (k,ℓ) dans $\mathbb{N}^2$:
$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}\ .$$

6. Avec l'indépendance de X et Y, on a $E(X\,Y) = E(X)\,E(Y) = \lambda^2\,p\,(1-p)$.

   Avec $N = X+Y$ on a
$$E(X\times N) = E(X^2)+E(X\,Y) = [V(X)+E(X)^2]+E(X)\,E(Y) = \lambda\,p+(\lambda\,p)^2+\lambda^2\,p\,(1-p)$$
$$E(X\,N) = \lambda\,(1+\lambda)\,p$$
   donc, avec $\mathrm{Cov}(X,N) = E(X\,N)-E(X)\,E(N)$, on obtient

$$\mathrm{Cov}(X,N) = (\lambda^2+\lambda)\,p - (\lambda\,p)\,\lambda : \boxed{\mathrm{Cov}(X,N) = \lambda\,p}\,.$$

(si on sait que la covariance est bilinéaire : $\mathrm{Cov}(X,N) = \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X,Y)$ *...)*

7. Avec $(Z \leqslant k) = (X \leqslant k) \cap (Y \leqslant k)$ et l'indépendance établie en 5) on a
$$P(Z \leqslant k) = P(X \leqslant k) \times P(Y \leqslant k).$$
Avec $P(X \leqslant k) = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{e}^{-\lambda\,p}\,\frac{(\lambda\,p)^j}{j!} = \mathrm{e}^{-\lambda\,p}\,S(k,\lambda\,p)$ et, de même,
$$P(Y \leqslant k) = \mathrm{e}^{-\lambda\,(1-p)}\,S\big(k,\lambda\,(1-p)\big),$$
on obtient
$$\boxed{P(Z \leqslant k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,S(k,\lambda\,p) \times S\big(k,\lambda\,(1-p)\big)}\,.$$

8. a) On peut faire :

```
def S(k,x):
    s, u = 1, 1
    for j in range(1,k+1):
        u *= x/j
        s += u
    return s
```

b) On veut $P(Z \geqslant 6)$, c'est-à-dire $1 - P(Z \leqslant 5)$. Ainsi, avec $\lambda\,p = \lambda\,(1-p) = 5$, il suffit d'écrire (en supposant qu'une fonction exponentielle est disponible)

`print(1-exp(-0.5)*S(5,5)**2)` .