Exercice 1.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
Pour $|t| < 1$, on définit les fonctions génératrices de X et de Y respectivement par :

1. $G_X(t) = \dfrac{1}{2-t}$.
2. $G_Y(t) = 2 - \sqrt{2-t}$.

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction G_X.
2. Donner le terme d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ du développement en série entière de la fonction $t \mapsto (1+t)^{1/2}$.
3. En déduire le développement en série entière de la fonction G_Y.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbf{P(X = n)}$ et $\mathbf{P(Y = n)}$.
5. Soient $S = X + Y$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbf{P(S = n)}$.
   Les questions suivantes ne sont pas à traiter sujet pour lundi pour les plus courageux
6. **Calculs d'espérances et de variances.**
   (a) Justifier que la variable aléatoire $X + 1$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.
   (c) Déterminer à l'aide de la fonction génératrice G_Y l'espérance des variables aléatoires Y et $Y(Y-1)$.
   (d) En déduire la variance de la variable aléatoire Y.
   (e) Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S.

Problème

Notations
$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.
$(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ désigne la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $H_j = \dfrac{1}{j!}\displaystyle\prod_{i=0}^{j-1}(X-i)$.
Pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n. On note $\binom{0}{0} = 1$ et $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.
$[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b. Ainsi $[\![a,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} | a \leqslant n \leqslant b\}$

Préliminaire

Pour $k \in \mathbb{N}$,donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $\binom{n}{k}$. Montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}x^n$ admet 1 pour rayon de convergence et que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \tag{I.1}$$

1 Probabilités

Dans cette première partie, toutes les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
La lettre p désigne un nombre réel de l'intervalle $]0,1[$.

1.1 Un conditionnement

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant la loi géométrique de paramètre p :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est la loi de Poisson de paramètre n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = k \mid X = n) = \mathrm{e}^{-n}\frac{n^k}{k!}.$$

Q 1. Déterminer la loi conjointe de X et Y.

Q 2. Calculer $\mathbb{P}(Y=0)$ et déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ une expression de $\mathbb{P}(Y=k)$ à l'aide d'une somme infinie que l'on ne cherchera pas à déterminer pour l'instant. Le calcul explicite est l'objet de la partie suivante.

Q 3. Vérifier que l'on a bien $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k)=1$.

Q 4. À l'aide des propriétés des familles sommables, montrer que Y admet une espérance finie et calculer cette espérance.

On trouve $E(Y)=\dfrac{1}{p}$.

1.2 Pile ou face infini

On considère la répétition infinie du lancer d'une pièce dont la probabilité de « faire pile » est p. Pour modéliser cette expérience, on admet que l'on peut définir une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[X_n=1]$ désigne l'événement « le n-ième lancer donne pile » et $[X_n=0]$ désigne l'événement « le n-ième lancer donne face ».
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit A_n et B_n par

— A_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a autant de piles que de faces » ;

— B_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces ».

Par exemple si les six premiers lancers donnent dans l'ordre (face, face, pile, pile, face, pile), A_1 n'est pas réalisé mais A_2 et A_3 le sont, B_2 est réalisé mais B_1 et B_3 ne le sont pas.
Enfin on définit C, « au bout d'un certain nombre (non nul) de lancers, il y a autant de piles que de faces ».
On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n et B_n sont des événements, et que C est un événement.

Q 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer A_n à l'aide de la variable aléatoire $X_1+\ldots+X_{2n}$ et en déduire $\mathbb{P}(A_n)$.

Q 6. Montrer que les événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont incompatibles.

Q 7. Montrer que C est un événement et que $\mathbb{P}(C)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(B_n)$.

Q 8. On pose $A_0=\Omega$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A_{n-k})$.

Q 9. À l'aide, notamment de la formule du préliminaire, montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(B_n)=\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\big(p(1-p)\big)^n.$$

Q 10. Montrer que $\mathbb{P}(C)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2}{n+1}\dbinom{2n}{n}\big(p(1-p)\big)^{n+1}$.

L'objectif des questions suivantes est de calculer certaines des sommes obtenues dans la première partie.

2 Utilisation d'une famille de polynômes

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.

Q 11. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est définie sur $]-1,1[$.

Q 12. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(H_0,\ldots,H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$ et qu'il existe une unique famille $(\alpha_{k,0},\ldots,\alpha_{k,k})$ dans $\mathbb{R}^{k+1}$ telle que $X^k=\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j$.

Q 13. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner les valeurs de $\alpha_{k,0}$ et $\alpha_{k,k}$.

Q 14. Pour tout $(j,k)\in\mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, montrer que $\alpha_{k,j}=j^k-\sum_{i=0}^{j-1}\dbinom{j}{i}\alpha_{k,i}$.

Q 15. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme réel P_k tel que, pour tout $x \in]-1,1[$, $f_k(x)=\dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ et que ce polynôme vérifie la relation

$$P_k=\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}X^j(1-X)^{k-j}$$

Q 16. Exprimer f_{k+1} à l'aide de f_k' puis montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$.

Q 17. Calculer explicitement P_2 et P_3.

Q 18. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le degré de P_k ainsi que son coefficient dominant.

3 Une dernière formule

On s'intéresse dans cette sous-partie à la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} x^n$ dont on note R le rayon de convergence.

Q 19. Déterminer R et montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

Q 20. Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[\smallsetminus \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}. \tag{I.2}$$

Q 21. En déduire que, pour tout $x \in]-R, R[\smallsetminus \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n = \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right).$$

Q 22. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1}. \tag{I.3}$$

4 Retour sur les calculs rencontrés en partie I

Q 23. On avait trouvé une expression à l'aide d'une somme infinie de $\mathbb{P}(Y=k)$.
Montrer que :

$$\mathbb{P}(Y=k) = \frac{p}{(1-p)k!} f_k\left(\frac{1-p}{e}\right)$$

où f_k est la fonction introduite au début de la partie sur les polynômes.

Q 24. On considère $p \neq \dfrac{1}{2}$, montrer que

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}.$$

Q 25. À l'aide, entre autre du théorème radial, montrer que si $p = \dfrac{1}{2}$ alors

$$\mathbb{P}(C) = 1.$$