

1 Pour Mardi

Exercice 1 On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = (1 - X^2)^n$, $L_n = U_n^{(n)}$.

1. À l'aide d'intégration par parties, montrer que $\langle L_n, L_m \rangle = (-1)^m \langle U_n^{(n+m)}, U_m \rangle$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.
2. Prouver que la famille $(L_n)_{n \geq 0}$ est orthogonale et calculer $\|L_n\|^2$.

2 Pour Mercredi

Exercice 2 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que : a) $\ker({}^t A) = (\text{Im}(A))^\perp$, b) $\text{Im}({}^t A) = (\ker(A))^\perp$.

3 pour jeudi

Exercice 3 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

1. Soit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Justifier que $\|AX\|^2 = \langle {}^t AAX, X \rangle$.
2. Prouver que $\ker({}^t AA) = \ker(A)$. En déduire que $\text{Im}({}^t AA) = \text{Im}({}^t A)$.

4 pour vendredi

Exercice 4 Soient $(E, \langle, \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle + \langle x, u(y) \rangle = 0$ puis que $\text{Im}(u) = (\ker(u))^\perp$.
2. Soit $v = u|_{\text{Im}(u)}$. Démontrer que v est un automorphisme de $\text{Im}(u)$. Justifier que sa matrice A dans n'importe quelle base orthonormée est antisymétrique. En considérant $\det(A)$, prouver que $\text{rg}(u)$ est pair.