1

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, indépendantes. Soit

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1. Quelle est la loi de S_n, son espérance et sa variance ?
2. Soit $\lambda > 0$ et $Z_i = e^{\lambda(X_i - \frac{1}{2})}$. Calculer $\mathrm{E}(Z_i)$ pour tout i.
3. En déduire $\mathrm{E}\Big(e^{\lambda(S_n - \mathrm{E}(S_n))}\Big)$ pour tout n.
4. Soit $t > 0$. A l'aide du résultat précédent, trouver une fonction f_t telle que
$$\mathrm{P}\left(S_n - \mathrm{E}(S_n) > nt\right) \leq e^{-nf_t(\lambda)}$$
pour tout $\lambda, t > 0$.
5. Calculer le maximum $I(t)$ de $\lambda \mapsto f_t(\lambda)$ et conclure que la probabilité ci-dessus est majorée par $e^{-nI(t)}$. Représenter la fonction $I(t)$ sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
6. Majorer la probabilité d'obtenir plus de 600 piles en jetant 1000 fois une pièce de monnaie équilibrée ; comparer avec le résultat de l'inégalité de Tchebychez.