

PROBLÈME 1 : ANALYSE ET PROBABILITÉS

On propose d'étudier dans ce problème le comportement d'une certaine suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sous différents points de vue.

Dans la partie 1, on étudie les aspects analytiques de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$: convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, propriétés d'intégrales associées à f_n et modes de convergence de la série $\sum f_n$.

La partie 2 correspond à l'étude de la formule de Bernstein : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \right) = \frac{1}{2}$.

Cette formule, en lien avec la suite de fonctions introduites dans la partie 1, peut-être avantageusement interprétée en terme de suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Poisson. Le point de vue probabiliste permet alors d'éclairer le lien avec une intégrale intervenant en partie 1 et l'existence de la limite envisagée dans la formule de Bernstein. Cela permet aussi d'approcher cette limite par différentes méthodes.

Les parties 1 et 2 peuvent être traitées, en grande partie, indépendamment l'une de l'autre.

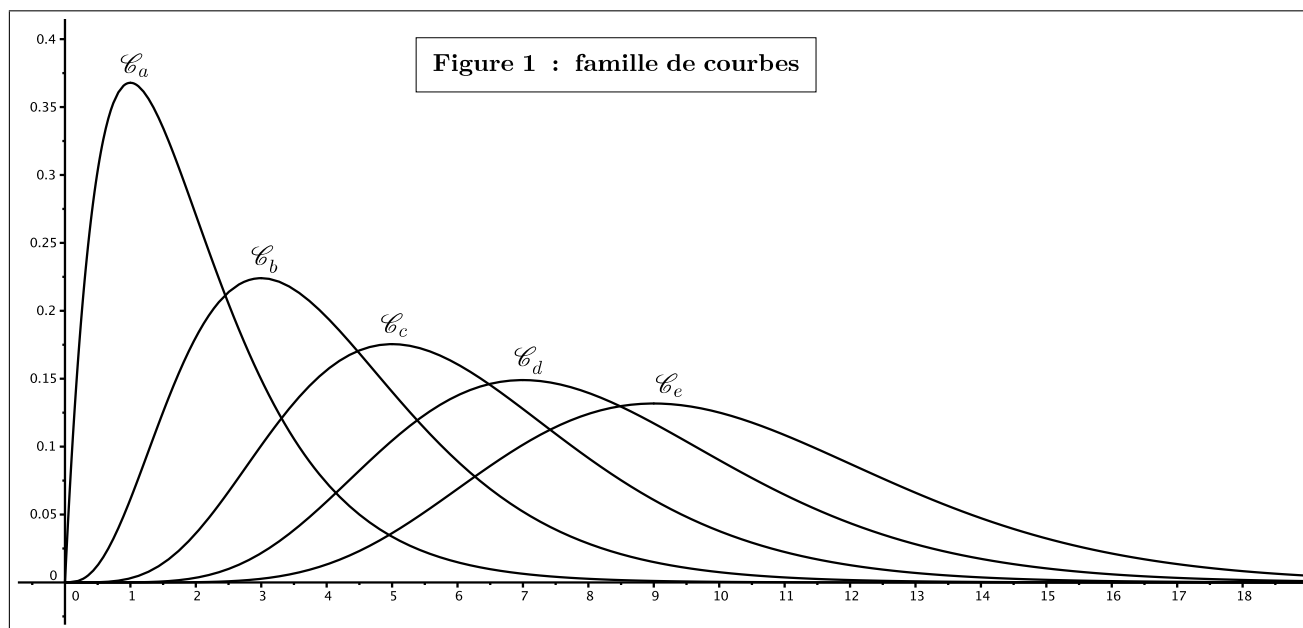
PARTIE 1 : ANALYSE

On considère la fonction f et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n , définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) = 0, \quad \text{et} \quad f_n(t) = \frac{e^{-t} t^n}{n!}.$$

1. On rappelle qu'un équivalent de $n!$ est $\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$.
 - (a) Étudier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$, et en déduire son maximum.
 - (b) Montrer que $f_n(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ quand n tend vers $+\infty$.
 - (c) Établir que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.
2. (a) Déterminer l'ensemble D des valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ est convergente, et vérifier que $\mathbb{R}_+ \subset D$.
 - (b) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} t^x dt$ est convergente.
 - (c) Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
 - (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente.
 - (e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n(x) = \frac{1}{n!} \int_x^{+\infty} e^{-t} t^n dt$.
 - (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(x) = 1 - \int_0^x f_n(t) dt$.
 - (b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner l'expression de H'_n .
 - (c) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les limites $\lim_{x \rightarrow 0} (H_n(x))$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (H_n(x))$.
 - (d) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n(x))$.

4. Dans la figure 1 ci-dessous, on peut visualiser certaines représentations graphiques des fonctions de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dont celle de f_1 et f_5 .



- (a) Lesquelles des courbes C_a, C_b, C_c, C_d ou C_e de la figure 1 correspondent respectivement aux représentations graphiques de f_1 et de f_5 ?
- (b) Pouvez-vous faire le lien entre cette figure et certaines propriétés analysées dans les questions précédentes ?
- 5.
- (a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
- (b) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur le segment $[0, a]$.
- (c) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

PARTIE 2 : PROBABILITÉS

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et mutuellement indépendantes. On admet que dans ce cas, pour tout $n \geq 2$, $X_1 + \dots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes.

On suppose de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre 1.

On rappelle que si X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et qui suit une loi de Poisson de paramètre λ , alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

1. (a) Montrer que S_n suit une loi de Poisson de paramètre n et en déduire son espérance et sa variance.
- (b) Déterminer l'espérance et la variance de S_n^* .
- (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(S_n^* \leq 0) = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$.

2. Soient $r \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$. On rappelle que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{r+1}$ sur I , alors on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^r f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(r+1)}(t) \frac{(b-t)^r}{r!} dt.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$e^n = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} + \int_0^n \frac{e^{n-t} t^n}{n!} dt.$$

3.

(a) Montrer que $\mathbf{P}(S_n^* \leq 0) = \frac{1}{n!} \int_n^{+\infty} e^{-t} t^n dt = H_n(n)$, où H_n est définie dans la partie 1.

(b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(S_n^* \leq 0) - \mathbf{P}(S_{n+1}^* \leq 0) = \int_n^{n+1} e^{-t} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt - e^{-n} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(c) En déduire que la suite $(\mathbf{P}(S_n^* \leq 0))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante qui converge vers une limite $\ell \in [0, 1[$.

(d) Proposer une méthode numérique et une méthode probabiliste pour conjecturer la valeur de ℓ . Quels sont les avantages et les inconvénients respectifs de ces deux méthodes ?

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbf{G}_{S_n}$ la fonction génératrice de S_n . On rappelle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{G}_{S_n}(t) = \mathbf{E}(t^{S_n}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = k) t^k.$$

(a) Donner, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, une expression simple de $\mathbf{G}_{S_n}(t)$.

(b) Vérifier que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, $t^{S_n^*}$ admet une espérance, notée $\mathbf{E}(t^{S_n^*})$, et que :

$$\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t\sqrt{n}}.$$

(c) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathbf{E}(t^{S_n^*}))$.

sujet 1 Marche aléatoire

On considère $\Omega = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On définit les applications coordonnées, pour tout $i \geq 1$,

$$X_i : \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega \mapsto \omega_i \in \mathbb{Z}$$

On admet que l'on peut construire une tribu $\mathcal{B}$ et une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω , de sorte que les X_i soient des variables aléatoires, indépendantes et de même loi donnée par

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$$

On définit la suite de variables aléatoires $(S_n, n \geq 0)$ par

$$S_0(\omega) = 0, \quad S_n(\omega) = \sum_{i=1}^n X_i(\omega)$$

On définit enfin la variable aléatoire T par

$$\begin{aligned} T : \Omega &\rightarrow \overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \\ \omega &\rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } S_n(\omega) \neq 0, \forall n \geq 1 \\ \inf\{n \geq 1, S_n(\omega) = 0\} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n , on note $E_n = \{T > n\}$, pour $n \geq 1$, $A_n^n = \{S_n = 0\}$ et pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$A_k^n = \{S_k = 0\} \cap \bigcap_{i=k+1}^n \{S_i \neq 0\}$$

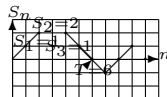


Figure 1 - Ici ω commence par $(1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1)$.
 ω appartient à A_6^6 et A_8^8 ainsi qu'à $A_0^1, A_0^2, \dots, A_0^5, A_6^7$ etc.

1. Montrer pour tout $1 \leq k < n$, pour tout $(i_1, \dots, i_{n-k}) \in \{-1, 1\}^{n-k}$,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i_1, \dots, X_n = i_{n-k}) = \mathbb{P}(X_1 = i_1, \dots, X_{n-k} = i_{n-k})$$

2. Montrer pour tout $1 \leq k < n$, pour tout $(j_1, \dots, j_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$ que

$$\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}) = \mathbb{P}(S_1 = j_1, \dots, S_{n-k} = j_{n-k})$$

Indication : on pourra considérer l'application

$$\theta : (z_1, \dots, z_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k} \mapsto \left(z_1, z_1 + z_2, \dots, \sum_{j=1}^{n-k} z_j \right) \in \mathbb{Z}^{n-k}$$

3. En déduire que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$

$$\mathbb{P}(A_k^n) = \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(E_{n-k})$$

4. Montrer l'égalité

$$1 = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(E_{n-k})$$

5. Pour tout réel x de $]0, 1[$, établir l'égalité :

$$\frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) x^n \right)$$

6. Pour tout entier naturel n , calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$.

Indication : on discutera suivant la parité de n .

7. En déduire que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

8. A l'aide des résultats obtenus dans les parties précédentes (c'était un pb de concours d'une autre section mais pas besoin d'aide pour des MP) déterminer, quand l'entier naturel n tend vers l'infini, un équivalent de $\mathbb{P}(E_n)$.

9. Montrer que l'on a : $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$.
 10. Pour tout réel $x \in [0, 1]$, prouver l'égalité :

$$1 - \sqrt{1 - x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n)x^n$$

11. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(T = 2n) = \frac{1}{2n-1} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

Sujet 2 Théorème d'approximation de Weierstrass

Soit n un entier strictement positif, $x \in [0, 1]$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et distribuées selon la même loi de Bernoulli de paramètre x . On note également : $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$; $Z_n = \frac{S_n}{n}$ et $B_n(f)(x) = E(f(Z_n))$.

- 5) Rappeler sans démonstration, la loi de S_n . En déduire, avec démonstration, les valeurs de l'espérance et de la variance de S_n en fonction de n et de x .
 6) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $\alpha > 0$:

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |\frac{k}{n} - x| \geq \alpha}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

- 7) Montrer que

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right)$$

et en déduire que la suite $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$. On pourra utiliser le résultat de la question précédente ainsi que le théorème de Heine.

On a donc établi le *théorème de Weierstrass* sur le segment $[0, 1]$: toute fonction continue sur $[0, 1]$ y est limite uniforme d'une suite de polynômes. On en déduit aisément, et on l'admet, le théorème d'approximation de Weierstrass sur un segment quelconque $[a, b]$.

sujet numéro 3 vous pouvez passer le I un peu pénible pour aller directement au II

Dans ce problème, nous étudions le processus de Galton-Watson qui permet entre autres de modéliser le développement d'une population. Ce processus est par exemple utilisé en biologie ou en physique nucléaire.

Dans tout le problème, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si X est une variable aléatoire entière et positive sur cet espace, on notera G_X , série entière de rayon de convergence au moins 1, la fonction génératrice de X . On rappelle que la fonction génératrice de X est la somme de la série entière :

$$\forall t \in [-1, 1], G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$$

La fonction génératrice d'une variable aléatoire caractérise sa loi. Plus précisément, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et si (a_n) est une suite de réels positifs tels que, pour tout $t \in [0, 1]$, $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathbb{P}(X = n)$.

On admettra le théorème suivant (lemme de Cesaro) : si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels convergente vers ℓ et si on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$ alors la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ converge vers ℓ .

1 Etude d'une suite récurrente

On considère une fonction f de classe C^2 sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ telles que f' et f'' soient à valeurs positives. On suppose $ff(1) = 1$, $f'(0) < 1$ et $f''(1) > 0$.

On considère de plus la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On pose $m = f'(1)$.

I.A

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, puis quelle est convergente. On note ℓ sa limite.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution. Dans toute la suite, on la notera x_f .
3. Montrer que $\ell = x_f$.

I.B On suppose $m > 1$. Montrer que $x_f \in [0, 1[$.

I.C On suppose maintenant $m \leq 1$. Montrer que $x_f = 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.

I.D Dans cette question, on suppose $m = 1$.

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1 - u_n$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \right) = \frac{f''(1)}{2}$$

2. En déduire que, quand n tend vers l'infini, $1 - u_n = \varepsilon \sim \frac{2}{nf''(1)}$. On pourra utiliser le lemme de Césaro admis en préambule.

I.E On suppose maintenant $m < 1$ et on pose encore, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1 - u_n$.

1. Montrer que la série de terme général ε_n est absolument convergente et en déduire la convergence de celle de terme général $\ln \left(\frac{m^{-(n+1)} \varepsilon_{n+1}}{m^{-n} \varepsilon_n} \right)$.
2. En déduire qu'il existe $c > 0$ tel que, quand n tend vers $+\infty$, $1 - u_n \sim cm^n$.

2 Formule de Wald

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$, et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des précédentes. $(T, X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

On note G_X la fonction génératrice commune à toutes les X_n .

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$, on pose $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n X_k(\omega)$ et $S_0(\omega) = 0$, puis $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$.

II.A On souhaite démontrer l'égalité $G_S = G_T \circ G_X$.

1. Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.
2. En admettant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, S_k est indépendante de X_{k+1} , prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_{S_k} = (G_X)^k$.
3. En admettant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T et S_n sont indépendantes, montrer que

$$\forall t \in [-1, 1], \forall K \in \mathbb{N}, G_S(t) = \sum_{k=0}^K G_X(t)^k \mathbb{P}(T = k) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k) t^n \right)$$

4. Pour $K \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1[$, on pose $R_K = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k) t^n \right)$. Montrer que

$$0 \leq R_K \leq \frac{1}{1-t} \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(T = k)$$

5. Conclure.

II.B En déduire que, si T et les X_n sont d'espérance finie, alors S aussi et $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X_1)$.

II.C Lors d'une ponte, un insecte pond un nombre aléatoire dufs suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Ensuite, la probabilité qu'un uf donné devienne un nouvel insecte est $\alpha \in]0, 1[$.

1. Rappeler la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ .
2. En utilisant la relation de composition ci-dessus, déterminer la loi du nombre d'insectes issus de la ponte.

3 Processus de Galton-Watson

Soit μ une loi de probabilité caractérisée par la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de nombre réels entre 0 et 1 telle que $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Dire qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suit la loi μ signifie que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(X = k) = p_k$.

On suppose que $p_0 + p_1 < 1$ (ce qui signifie qu'il existe au moins un entier k supérieur ou égal à 2 tel que $p_k \neq 0$).

On étudie un individu qui a un certain nombre de fils. Ces fils ont également chacun (indépendamment les uns des autres) un certain nombre de fils et ainsi de suite. Afin de modéliser la situation, on se donne des variables aléatoires $(X_{n,i})_{(n,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$, indépendantes qui suivent toutes la loi μ , on pose Y_0 la variable certaine égale à 1 et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$,

$$Y_{n+1}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } Y_n(\omega) = 0 \\ \sum_{i=1}^{Y_n(\omega)} X_{n,i}(\omega) & \text{si } Y_n(\omega) \neq 0 \end{cases}$$

Y_n représente le nombre d'individus à la génération n .

S'il n'y a pas d'individu à la génération n , il n'y en a pas plus à la génération suivante et sinon, le nombre de fils du i -ème élément de la génération n est égal à $X_{n,i}$.

On dit qu'il y a extinction lorsqu'il existe un entier n tel que $Y_n = 0$.

On note f la fonction génératrice de la loi μ (et donc de chacune des variables $X_{n,i}$) et, pour $n \in \mathbb{N}$, φ_n la fonction génératrice de la variable aléatoire Y_n .

On a donc en particulier, pour $t \in [0, 1]$, $\varphi_0(t) = t$.

On suppose que toute variable aléatoire suivant la loi μ possède une espérance égale à m et une variance.

III.A Probabilité d'extinction

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f$.
2. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'espérance de Y_n en fonction de m et de n .
3.
 - a) Vérifier que la probabilité d'extinction est égale à la limite de la suite $(\varphi_n(0))_{n \geq 0}$.
 - b) Vérifier qu'on peut appliquer les résultats de la partie 1 à la suite $(\varphi_n(0))_{n \geq 0}$.
4. Si $m \leq 1$, montrer que la probabilité d'extinction est égale à 1.

On définit alors le temps T d'extinction par

$$\forall \omega \in \Omega, T(\omega) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} / Y_n(\omega) = 0\} & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } Y_n(\omega) = 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admettra que T est une variable aléatoire.

III.B Cas sous-critique $m < 1$

On suppose dans cette question que $m < 1$.

1. Vérifier que T admet une espérance.
- 2.
- a) Montrer que, pour tout entier n , $\mathbb{P}(Y_n \geq 1) \leq m^n$.
- b) Montrer que $\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > k)$.
- c) En déduire une majoration de $\mathbb{E}(T)$.

II.C Etude de la lignée

Dans cette question, on suppose $m \leq 1$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Z_n = 1 + \sum_{i=1}^n Y_i \quad \text{et} \quad Z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$$

On admettra que Z est une variable aléatoire définie sur $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (Y_k = 0)$.

1. Montrer que Z est définie sur un ensemble de probabilité 1.
- 2.
- a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{P}(Z_n \leq k))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite convergente. Déterminer sa limite.
- b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{P}(Z_n = k))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\mathbb{P}(Z = k)$.
- c) Montrer que pour tout $s \in [0, 1[$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $K \in \mathbb{N}$,

$$|G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \sum_{k=0}^K |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| + \frac{s^K}{1-s}$$

- d) En déduire que la suite de fonctions (G_{Z_n}) converge simplement vers G_Z sur $[0, 1]$.
- 3.
- a) Exprimer G_{Z_1} en fonction de f .
- b) On admet que, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2 et pour tout $s \in [0, 1]$, $G_{Z_n}(s) = sf(G_{Z_{n-1}}(s))$. En déduire que, pour tout $s \in [0, 1]$, $G_Z(s) = sf(G_Z(s))$.
- c) Montrer que Z est espérance finie si et seulement si $m < 1$. Calculer l'espérance lorsque c'est le cas.

Exercice 5

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et φ_x la fonction qui à tout réel t associe $\varphi_x(t) = \max(x, t)$.
 - (a) Donner une représentation graphique de φ_x .
 - (b) Calculer $\Phi(x) = \int_0^1 \varphi_x(t) dt$.
 - (c) Donner une représentation graphique de Φ .

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on admet que l'on définit une variable aléatoire Y , définie sur le même espace probabilisé, par

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t) dt$$

2. Dans cette question, X suit une loi géométrique. Déterminer $Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.
3. Dans cette question, X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.
 - (a) Donner $X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X = x])$ où $x \in X(\Omega)$, l'espérance et la variance de X .

- (b) Déterminer $Y(\Omega)$ et donner la loi de probabilité de Y .
4. On suppose dans cette question que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1/2, 2\}$ et que

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{8}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{3}$$

- (a) Déterminer la valeur de $\mathbb{P}(X = 1/2)$.
- (b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y puis calculer son espérance $\mathbb{E}(Y)$.
- (c) On note Z la variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé par $Z = XY$. Justifier que $Z(\Omega) = \{-1/2, 0, 5/16, 4\}$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z .
- (d) Calculer le coefficient de corrélation $\rho(X, Y)$ des deux variables aléatoires X et Y .

Centrale 2017 - PSI1

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans ce sujet sont supposées discrètes.

La partie 1 est composée de trois sous-parties mutuellement indépendantes, toutes trois utilisées dans la partie 2.

Notations et rappels.

Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes la loi de X . On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

Si Y est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 1, on note $\mathbb{E}(Y)$ l'espérance de Y . Si Y est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2, on note $\mathbb{V}(Y)$ la variance de Y . Si Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on abrège “ Y est d'espérance finie” en “ $\mathbb{E}(Y) < +\infty$ ”. Si $\tau \in \mathbb{R}^{+*}$, on dit que X vérifie (C_τ) si $\mathbb{E}(e^{\tau|X|}) < +\infty$.

On pourra utiliser la propriété suivante :

$\mathcal{P}$: si Y, Z sont des variables aléatoires réelles telles que $0 \leq Y \leq Z$, $\mathbb{E}(Z) < +\infty \Rightarrow \mathbb{E}(Y) < +\infty$.

Etant données deux variables aléatoires réelles Y et Z sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on dit que Y est presque sûrement égale à Z lorsque $\mathbb{P}(Y = Z) = 1$.

On admet le résultat suivant (lemme des coalitions) : soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Soient A et B des sous-ensembles de $\mathbb{N}^*$ disjoints. Alors, toute variable aléatoire fonction de Y_n , $n \in A$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des Y_n , $n \in B$.

4 Premiers résultats

4.1 Une classe de variables aléatoires

- Soient U et V deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ possédant un moment d'ordre 2 et telles que V n'est pas presque sûrement nulle.
Montrer que $\mathbb{E}(U^2)\mathbb{E}(V^2) - \mathbb{E}(UV)^2 \geq 0$ et que $\mathbb{E}(U^2)\mathbb{E}(V^2) - \mathbb{E}(UV)^2 = 0$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda V + U$ est presque sûrement nulle.
- (a) On suppose que X est bornée. Justifier que X vérifie (C_τ) pour tout τ dans $\mathbb{R}^{+*}$.
(b) On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Quels sont les réels t tels que $\mathbb{E}(e^{tX}) < +\infty$? Pour ces t , donner une expression simple de $\mathbb{E}(e^{tX})$.

(c) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre λ :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}^{+*}$$

Quels sont les réels t tels que $\mathbb{E}(e^{tX}) < +\infty$? Pour ces t , donner une expression simple de $\mathbb{E}(e^{tX})$.

3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On suppose que $\mathbb{E}(e^{aX}) < +\infty$ et $\mathbb{E}(e^{bX}) < +\infty$.

(a) Montrer que $\forall t \in [a, b]$, $e^{tX} \leq e^{aX} + e^{bX}$. En déduire $\mathbb{E}(e^{tX}) < +\infty$.

Que peut-on en déduire sur l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} / \mathbb{E}(e^{tX}) < +\infty\}$?

(b) Soient $k \in \mathbb{N}$, t dans $]a, b[$. On note $\theta_{k,t,a,b}$ la fonction $y \in \mathbb{R} \mapsto \frac{y^k e^{ty}}{e^{ay} + e^{by}}$.

Déterminer les limites de $\theta_{k,t,a,b}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que $\mathbb{E}(|X|^k e^{tX}) < +\infty$.

(d) On reprend les notations de la question (b). Soient $k \in \mathbb{N}$, c et d deux réels tels que $a < c < d < b$. Montrer qu'il existe $M_{k,a,b,c,d} \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $t \in [c, d]$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$: $|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leq M_{k,a,b,c,d}$.

4. Dans cette question, τ est un élément de $\mathbb{R}^{+*}$ et X vérifie (C_τ) .

(a) Montrer que l'ensemble des réels t tels que $\mathbb{E}(e^{tX}) < +\infty$ est un intervalle I contenant $[-\tau, \tau]$.

Pour tout t dans I , on note $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$.

(b) Montrer que si $X(\Omega)$ est fini, φ_X est continue sur I et de classe C^∞ sur l'intérieur de I .

(c) On suppose maintenant que $X(\Omega)$ est un ensemble infini dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}^*\}$ où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels deux à deux distincts et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$.

En utilisant les résultats établis en 1.1.3 et deux théorèmes relatifs aux séries de fonctions que l'on énoncera complètement, montrer que φ_X est continue sur I et de classe C^∞ sur l'intérieur de I .

(d) Vérifier que pour t dans l'intérieur de I et $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}(X^k e^{tX})$.

(e) Soit $\psi_X = \frac{(\varphi_X)'}{\varphi_X}$.

Montrer que ψ_X est croissante sur l'intérieur de I et que, si X n'est pas presque sûrement égale à une constante, ψ_X est strictement croissante sur l'intérieur de I .

4.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On suppose que X admet un moment d'ordre 2.

1. Soit δ un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(|S_n - n\mathbb{E}(X)| \geq n\delta) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{n\delta^2}$$

2. Si u et v sont deux nombres réels tels que $u < \mathbb{E}(X) < v$, déterminer la limite de la suite $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n = \mathbb{P}(nu \leq S_n \leq nv)$$

4.3 Suites sur-additives

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, u_{m+n} \geq u_m + u_n$.

On suppose que l'ensemble $\{\frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est majoré et on note s sa borne supérieure.

1. Soient m, q, r des éléments de $\mathbb{N}$. On note $n = mq + r$. Comparer les deux nombres réels u_n et $qu_m + u_r$ et montrer que $u_n - ns \geq q(u_m - ms) + u_r - rs$.
2. On fixe m dans $\mathbb{N}^*$ et ε dans $\mathbb{R}^{+*}$. En utilisant la division euclidienne de n par m , montrer qu'il existe un entier N tel que pour tout $n > N$,

$$\frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} - \varepsilon$$

3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = s$.

5 Le théorème des grandes déviations

Soit a un nombre réel.

5.1 Exposant des grandes déviations

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \geq a) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(S_n \geq na) = 0$.
2. Soient $m, n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Montrer que $S_{m+n} - S_m$ et S_n ont même loi.
 - (b) Soit b un nombre réel. Montrer que $\mathbb{P}(S_{m+n} \geq (n+m)b) \geq \mathbb{P}(S_n \geq nb)\mathbb{P}(S_m \geq mb)$.

On suppose dans toute la suite du problème que $\mathbb{P}(X \geq a) > 0$.

1. Montrer que la suite $\left(\frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq na))}{n}\right)_{n \geq 1}$ est bien définie et admet une limite $\gamma_a \leq 0$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(S_n \geq na) \leq e^{n\gamma_a}$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que X vérifie (C_τ) pour un certain $\tau > 0$ et n'est pas presque sûrement constante. On suppose également que $a > \mathbb{E}(X)$.

On se propose d'établir que $\gamma_a < 0$ (ce qui montre que la suite $(\mathbb{P}(S_n \geq na))_{n \geq 1}$ converge géométriquement vers 0) puis de déterminer γ_a .

5.2 Majoration des grandes déviations

L'intervalle I et la fonction φ_X sont définis comme dans la question 1.1.4.

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in I \cap \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = (\varphi_X(t))^n, \mathbb{P}(S_n \geq na) \leq \frac{\varphi_X(t)^n}{e^{nta}}$$

2. On définit la fonction $\chi : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \ln(\varphi_X(t)) - ta \end{cases}$.

- (a) Montrer que la fonction χ est minorée sur $I \cap \mathbb{R}^+$.

On note η_a la borne inférieure de χ sur $I \cap \mathbb{R}^+$.

- (b) Donner un équivalent de $\chi(t)$ lorsque t tend vers 0. En déduire $\eta_a < 0$.

- (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(S_n \geq na) \leq e^{n\eta_a}$. En déduire que $\gamma_a < 0$.

- (d) Dans chacun des deux cas suivants, déterminer l'ensemble des nombres réels a vérifiant les conditions $\mathbb{P}(X \geq a) > 0$ et $a > \mathbb{E}(X)$; puis, pour a vérifiant ces conditions, calculer η_a .

i. X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 < p < 1$.

ii. X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

5.3 Le théorème de Cramer

On suppose ici que la borne inférieure η_a de la fonction χ sur $I \cap \mathbb{R}^+$ est atteinte en un point σ intérieur à $I \cap \mathbb{R}^+$.

Soient t un nombre réel intérieur à I et tel que $t > \sigma$, b un nombre réel tel que $b > \frac{(\varphi_X)'(t)}{\varphi_X(t)}$.

1. (a) Calculer $\sum_{x \in X(\Omega)} \frac{e^{tx}}{\mathbb{E}(e^{tX})} \mathbb{P}(X = x)$.

On admet alors (quitte à modifier $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$)

- qu'il existe une variable aléatoire X' sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $X'(\Omega) = X(\Omega)$ et dont la loi de probabilité est donnée par

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}(X' = x) = \frac{e^{tx}}{\mathbb{E}(e^{tX})} \mathbb{P}(X = x)$$

- qu'il existe une suite $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant toutes la même loi que X .

- (a) Montrer que

$$\mathbb{E}(X') = \frac{(\varphi_X)'(t)}{\varphi_X(t)}, \mathbb{E}(X') > a$$

2. On admet que si $n \in \mathbb{N}^*$ et si f est une application de $X(\Omega)^n$ dans $\mathbb{R}^+$, on a

$$\mathbb{E}(f(X'_1, \dots, X'_n)) = \frac{\mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_n) e^{tS_n})}{\varphi_X(t)^n}$$

- (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S'_n = \sum_{k=1}^n X'_k$. Montrer que $\mathbb{P}(na \leq S'_n \leq nb) \leq \mathbb{P}(S_n \geq na) \frac{e^{ntb}}{\varphi_X(t)^n}$.

On pourra introduire l'application f définie de $X(\Omega)^n$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } na \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq nb \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (b) En utilisant les questions **1.2.2**, **2.2.2c** et le (a) ci-dessus, montrer finalement que $\eta_a = \gamma_a$.

3. Dans cette question, on pourra utiliser les résultats de **2.2.2d**.

- (a) Soit α dans $]0, 1/2[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_n = \{k \in \{0, \dots, n\}, |k - \frac{n}{2}| \geq \alpha n\}, U_n = \sum_{k \in A_n} \binom{n}{k}$$

Déterminer la limite de la suite $(U_n^{1/n})_{n \geq 1}$.

- (b) Soit $\lambda > 0$, $\alpha > \lambda$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$T_n = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq \alpha n}} \frac{n^k \lambda^k}{k!}$$

Déterminer la limite de la suite $(T_n^{1/n})_{n \geq 1}$.