1 Galton Watson épisode 2 correction et énoncé corrigé

On considère une famille $(X_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ de variables aléatoires de même loi X indépendantes et admettant une espérance et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires définies par récurrence par

$$Z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_{j,n+1}.$$

Concrètement $(Z_n)_{n\in N}$ modélise l'évolution d'une population dont, à chaque instant n, les individus meurent en donnant naissance (de manière indépendante) à des nombres d'enfants suivant la loi X.

On note G_X la fonction génératrice de X, on suppose que $P(X = 1)+P(X = 0) < 1$. On note également $m = \mathrm{E}(X)$

1. Montrer que G_X est strictement croissante, dérivable et G'_X est est strictement croissante sur $[0, 1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note G_{Z_n} la fonction génératrice de Z_n (définie sur $[0, 1]$). Montrer que $G_{Z_{n+1}} = G_{Z_n} \circ G_X$. En déduire $E(Z_n)$.
3. Soit T la variable aléatoire représentant le plus entier n (voire $+\infty$..)tel que $Z_n = 0$. Montrer que $P(T < +\infty)$ est le plus petit point fixe de G_X (point fixe c'est $f(a) = a$.)
4. Montrer que la population s'éteint presque surement si et seulement si $m \leq 1$.

éléments de correction

1. Le cours permet de conclure que G_X est une série entière définie sur $[0, 1]$ et dérivable sur $[0, 1]$ terme à terme car X admet une espérance. G_X est strictement croissante comme somme (infinie) de fonctions croissantes dont une au moins est strictement croissante. De même G'_X est strictement croissante pour la même raison. En effet un des coefficients de la série entière dérivée $k\mathrm{P}(X = k)$ est non nul car la loi n'est pas concentrée sur $\mathrm{P}(X = 0)$ et $\mathrm{P}(X = 1)$ grâce à l'hypothèse $\mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) < 1$.
   G_X et G'_X sont donc strictement croissantes.
2. Le calcul de $G_{Z_{n+1}}$ a été fait plusieurs fois en classe , je le refais

   $$\forall t \in [0, 1], G_{Z_{n+1}}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(Z_{n=1} = k)t^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} \mathrm{P}(Z_{n+1} = k \mid Z_n = l)\mathrm{P}(Z_n = l)t^k$$

   Car $Z_n = k$ est un système complet d'événements (si $P(Z_n = k) = 0$ on repasse à la formule des probas totales). A ce stade on peut affirmer que la famille $(\mathrm{P}(Z_{n+1} = k \mid Z_n = l)\mathrm{P}(Z_n = l))t^k)_{(k,l)\in\mathbb{N}^2}$ qui est à termes positifs est sommable. D'après le théorème de Fubini on peut échanger les deux sommes.

   $$\forall t \in [0, 1], G_{Z_{n+1}}(t) = \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\sum_{i=1}^{l} X_{n,i} = k)\mathrm{P}(Z_n = l)t^k = \sum_{l=0}^{+\infty} \mathrm{P}(Z_n = l)\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\sum_{i=1}^{l} X_{n,i} = k))t^k$$

   Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\sum_{i=1}^{l} X_{n,i} = k))t^k = G_{\sum_{i=1}^{l} X_{n,i}}(t) = \prod_{i=1}^{l} G_X(t) = G_X(t)^l$
   les dernières égalités étant justifiées par l'indépendance des $X_{n,i}$ et qu'elles suivent la même loi.
   Finalement, $\forall t \in [0, 1],\ G_{Z_{n+1}}(t) = G_{Z_n}(G_X(t))$.
   On montre par récurrence que Z_n admet une espérance et $\mathrm{E}(Z_n) = m^n$. Le résultat est vrai pour $n = 1$ par hypothèse de l'énoncé. L'induction se fait aisément : la dérivabilité de la composée de deux fonctions dérivables en 1 donne l'existence de $G'_{Z_{n+1}}(1)$ et l'égalité $G'_{Z_{n+1}}(1) = G'_X(1) \times G'_{Z_n}(G_X(1)) = m^{n+1}$.
3. l'événement $T < +\infty$ se traduit par il existe n tel que $Z_n = 0$ donc $T = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n = 0\}$. Les événements $\{Z_n = 0\}$ sont clairement croissants , le théorème de la limite croissante donne :

   $$\mathrm{P}(T < +\infty) = \lim_{n\mapsto+\infty} \mathrm{P}(Z_n = 0) = \lim_{n\mapsto+\infty} G_{Z_n}(0).$$

   On étudie la suite $u_n = G_{Z_n}(0)$ on a $u_{n+1} = G_X(u_n)$ on a donc une suite récurrente. La croissance de G_X permet de conclure à la monotonie de la suite u_n. Remarque $Z_0 = 1$ donc $\mathrm{P}(Z_0 = 0) = 0$ donc $u_0 = 0$, la suite est à valeurs dans $[0, 1]$ elle est donc croissante. Elle est bornée donc convergente (à ce stade on n'a pas besoin du sens de variations de u_n mais uniquement qu'elle est monotone).
   De plus G_X est continue , la limite de u_n est donc un points fixe. De plus si a est un points fixe alors u_n ne peut pas dépasser ce point fixe (un dessin permet de s'en convaincre) mais $u_n \leq a$ se démontre par récurrence. Donc u_n converge vers le plus petit point fixe de G_X. Ici le lecteur attentif se posera cette drôle de question : existe-t-il un plus petit point fixe ? Ce n'est pas évident et l'énoncé clairement passe sous silence cette difficulté , faisons de même.

4. Supposons que le plus petit point fixe soit 1, (encore une fois faire un dessin, sachant que m est la pente de la courbe itérative en 1).On a alors $G_X(t)-t$ est, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, de signe constant sur $[0,1[$, $G_X(0)-0=G_X(0)\geq 0$, donc $G_X(t)\geq t$, la taux d'accroissement $\dfrac{G_X(1)-G_X(t)}{1-t}<1$ puis par passage à la limite $m\leq 1$.
   Remarque : à ce stade la démonstration ressemble beaucoup à la démonstration de première année : si f est croissante dérivable sur un intervalle alors $f'\geq 0$, souvenons nous que la réciproque de ce théorème a été démontrée en première année par le TAF (programme de colle des mpsi1 de cette semaine c'est cocasse).
   Réciproquement G_X admet un point fixe $a<1$ par contraposée. On applique le TAf : continuité sur $[0,1]$ décidabilité sur $]0,1[$, il existe $c\in]0,1[$ tel que
   $$G_X(1)-G_X(a)=G'_X(c)(1-a)$$
   Or G'_X est croissante strictement donc $G'_X(1)>G'(c)=1$, ce qu'il fallait démontrer.