1 Exercice

Trois personnes A, B et C jouent au ballon.

Si A possède le ballon, il le passe à B avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et à C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.

Si B possède le ballon, il le passe à A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et à C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.

SiC possède le ballon, il le passe à A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et à B avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.

Soit A_n (resp. B_n, C_n) l'événement : A (resp. B, C) reçoit le ballon après le n-ième échange. On pose

$$X_n=\left(\begin{array}{c}P\left(A_n\right)\\ P\left(B_n\right)\\ P\left(C_n\right)\end{array}\right)$$

Solution 1. On prend pour X_0 un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}\left(\mathbb{R}^{+}\right)$dont la somme des composantes vaut 1 (vecteur de probabilité). Trouver une matrice M telle que $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1}=M X_n$.

2. Montrer que la suite $\left(X_n\right)_{n \geq 0}$ converge vers un vecteur limite que l'on déterminera.

3. Montrer que l'on peut changer les 6 probabilités de l'énoncé de façon que la matrice M soit non diagonalisable. Donner un exemple. Que dire alors de la limite de $\left(X_n\right)$?

Rép. 1. $P\left(A_{n+1}\right)=\frac{1}{3} P\left(B_n\right)+\frac{1}{3} P\left(C_n\right)$ etc., donc $M=\left(\begin{array}{ccc}0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 0\end{array}\right)$.

2. Calcul des valeurs propres : Comme $(1,1,1) M=(1,1,1), M^T$ a une valeur propre égale à 1 , donc aussi M. On trouve les deux autres valeurs propres λ_2, λ_3 avec $\operatorname{Tr}(M)=1+\lambda_2+\lambda_3=0$ et $\lambda_2 \lambda_3=\operatorname{det}(M)=2/9$. Un vecteur propre pour 1 est $X_1=\left(\begin{array}{l}5 \\ 7 \\ 8\end{array}\right)$.

Si $P=\left(X_1, X_2, X_3\right)$ est une matrice de passage, $M^n=P \operatorname{diag}\left(1, \lambda_2, \lambda_3\right)^n P^{-1}$ tend vers $M_{\infty}=P \operatorname{diag}(1,0,0) P^{-1}$. Donc la suite $X_n=M^n X_0$ converge. Soit X_{∞} la limite. Comme $X_{n+1}=M X_n$, $X_{\infty}=M X_{\infty}$. Ainsi X_{∞} est vecteur propre de M, pour la valeur propre 1 .

On montre par récurrence que la somme des coefficients de X_n vaut 1 . De même pour X_{∞}, donc $X_{\infty}=\frac{1}{20} X_1$.

3. Soit $M=\left(\begin{array}{ccc}0 & b & c \\ a & 0 & 1-c \\ 1-a & 1-b & 0\end{array}\right)$, où a, b, c sont dans $]0,1[$. Comme 1 est valeur propre et $\operatorname{tr}(M)=0$, le polynôme caractéristique est $\chi(x)=(-x+1)\left(x^2+x+\delta\right)$. Il y a une racine double $-\frac{1}{2}$ ssi $\delta=\frac{1}{4}$, avec $\delta=a c+b(1-a-c)$. On remarque que si $a=b$, alors a $=b=c=\frac{1}{2}$ dans ce cas : M est symétrique, et diagonalisable.

Le système $\left(M+\frac{1}{2} I\right) X=0$ peut s'écrire $\left(\begin{array}{cccc}1 & 2 b & 2 c & 0 \\ 0 & 1-4 a b & 2-2 c-4 a c & 0\end{array}\right)$, la solution est de dimension 1 si $a b \neq \frac{1}{4}$.

En utilisant $\delta=\frac{1}{4}, M$ est non diagonalisable si $a b \neq \frac{1}{4}, a \neq b$ et $c=\frac{\frac{1}{4}-b(1-a)}{a-b}$. Par exemple,

$$M=\left(\begin{array}{ccc}0 & 1/3 & 5/12 \\ 2/3 & 0 & 7/12 \\ 1/3 & 2/3 & 0\end{array}\right).$$

M est semblable à $J=\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2\end{array}\right)$, avec la matrice de passage $P=\left(\begin{array}{ccc}22 & 1 & 6 \\ 31 & 1 & -6 \\ 28 & -2 & 0\end{array}\right)$. $M^n=P J^n P^{-1}$ tend vers $M_{\infty}=P \operatorname{diag}(1,0,0) P^{-1}$. La conclusion est la même : $\left(X_n\right)$ tend vers X_{∞}, vecteur propre pour la valeur propre 1 . Dans l'exemple $X_{\infty}=\frac{1}{81} X_1$.

2 Exercice

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $p \in] 0,1[$. On se donne une variable $N: \Omega \rightarrow \mathbb{N}^*$ suivant la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$. On définit maintenant une variable $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$:

- on fixe $\omega \in \Omega$
- on pose $n=N(\omega)$
- on lance une pièce de monnaie parfaitement équilibrée n fois
- on note $X(\omega)$ le nombre de «pile» obtenus.

1) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{N = n_0\}$.
2) Soit $k \in \mathbb{N}$. On pose $f(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.
a) Déterminer le rayon R de la série entière f.
b) Calculer $f(x)$ sur l'intervalle ouvert de convergence.
3) Déterminer la loi de X et reconnaître la loi de $X + 1$.
Solution

1) Sachant $\{N = n_0\}$, la loi de X est $\boxed{\text{la loi binomiale } \mathscr{B}\left(n_0, \frac{1}{2}\right)}$

2-a) On pose $a_n = \binom{n}{k}$ de sorte que $a_n \sim \frac{n^k}{k!}$ et le rayon de $\sum_n n^k x^n$ vaut 1, donc $R = 1$
b) Si$|x| < 1$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^n \\
&= \frac{x^k}{k!} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} x^n \right)^{(k)} \\
&= \frac{x^k}{k!} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)^{(k)} \\
&= \frac{x^k}{k!} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(k)} \\
&= \frac{x^k}{k!} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \\
&= \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}
\end{aligned}$$

3) Pour la loi de X,
$\triangleright X(\Omega) = \mathbb{N}$:
$\triangleright$ pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = n)\mathbb{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} p(1-p)^{n-1} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} p(1-p)^{n-1} \\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1-p}{2} \right)^n
\end{aligned}$$

On en déduit par la question précédente :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{p}{1-p} \times \left(\frac{1-p}{2} \right)^k \times \left(\frac{2}{1+p} \right)^{k+1} = \frac{2p}{1+p} \left(\frac{1-p}{1+p} \right)^k$$

On conclut que la variable $Y = X + 1$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = k-1) = \frac{2p}{1+p} \left(\frac{1-p}{1+p} \right)^{k-1} = \alpha(1-\alpha)^{k-1}$$

avec $1 - \alpha = \frac{1-p}{1+p}$, donc $\quad Y \sim \mathscr{G}\left(\frac{2p}{1+p} \right)$

3 Exercice

On considère des urnes $\mathscr{U}_n$ contenant des boules blanches et noires : pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'urne $\mathscr{U}_n$ contient une boule blanche et n boules noires.

Soit $N : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On définit trois variables X, Y et T de Ω vers $\mathbb{N}$ par :

- on fixe ω dans Ω
- on pose $n = N(\omega)$
- on effectue une série de tirages avec remise dans l'urne $\mathscr{U}_n$
- on note $X(\omega) = 1$ si au cours des n premiers tirages on a tiré au moins une fois la boule blanche et $X(\omega) = 0$ sinon, puis $Y(\omega)$ le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages et enfin $T(\omega)$ le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche pour la première fois.

1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer les lois conditionnelles de X, Y et T sachant l'événement $\{N = k\}$.

2) Montrer que X, Y et Z admettent des espérances finies, puis :

$$\mathbb{E}(X) \leqslant 1 - e^{-1}, \mathbb{E}(Y) = \frac{e^{-\lambda} - 1 + \lambda}{\lambda} \text{ et } \mathbb{E}(T) = \lambda + 1$$

3) On constate que l'on a eu une boule blanche au cours du premier tirage. Quelle est la probabilité que N vaille k, où $k \in \mathbb{N}$?

Solution

1) Soit $k \in \mathbb{N}$.

Sachant l'événement $\{N = k\}$:

- la variable X suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, avec $p = 1 - \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$
- la variable Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(k, \frac{1}{k+1}\right)$
- la variable T suit la loi géométrique $\mathscr{G}\left(\frac{1}{k+1}\right)$.

Lorsque $k = 0$, on a $X = Y = 0$ et $T = 1$.

2) - Pour X qui est bornée :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X = 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{k}{k+1}\right)^k\right) \mathbb{P}(N = k) = \mathbb{E}\left(1 - \left(\frac{N}{N+1}\right)^N\right) \leqslant 1 - e^{-1}$$

car pour tout $\alpha > 0$, $\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\alpha = \exp\left(-\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right) \geqslant e^{-1}$

- pour Y, les familles manipulées étant sommables, on peut écrire :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(Y \mid N = k)\mathbb{P}(N = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k+1}\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{E}\left(\frac{N}{N+1}\right) = 1 - \mathbb{E}\left(\frac{1}{N+1}\right)$$

Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{N+1}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^\lambda - 1\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\mathbb{E}(Y) = 1 - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^\lambda - 1\right)$$

d'où la formule proposée.

- Pour la variable T, avec les mêmes techniques :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(T \mid N = k)\mathbb{P}(N = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{E}(N+1) = \lambda + 1$$

3-a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N=k \mid T=1) &= \frac{\mathbb{P}(N=k, T=1)}{\mathbb{P}(T=1)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(T=1 \mid N=k)\mathbb{P}(N=k)}{\mathbb{P}(T=1)}\\ &= \frac{1}{k+1} \times e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \times \frac{1}{\mathbb{P}(T=1)}\end{aligned}$$

Or, $\mathbb{P}(T=1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T=1 \mid N=k)\mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$

En définitive,

$$\mathbb{P}(N=k \mid T=1) = \frac{1}{e^{\lambda}-1} \times \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$$

4 Exercice

On considère deux entiers n et p strictement positifs.

On dispose de n tiroirs $T_1, \cdots, T_n$ et de p boules $B_1, \cdots, B_p$.

On dispose les p boules dans les tiroirs, les rangements étant équiprobables et indépendants.

On note X_k la variable aléatoire comptant le nombre de boules dans le tiroir T_k et Y le nombre de tiroirs vides.

1) Soit k un entier entre 1 et n. Déterminer la loi de X_k.

2) Les variables $X_1, \cdots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

3) Déterminer $\mathbb{E}(Y)$.

4) Déterminer la loi de Y.

Solution

1) On considère que X_k est la somme indépendante de p variables suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$: $X_k \sim \mathscr{B}\left(p, \frac{1}{n}\right)$.

2) Non, car leur somme vaut p et par exemple en prenant ε_i valant 0 ou 1 de somme différente de p, alors $\mathbb{P}\left(X_1 = \varepsilon_1, \cdots, X_n = \varepsilon_n\right) = 0$ mais chaque $P\left(X_k = \varepsilon_k\right)$ n'est pas nul.

3) On pose $Y_k = 1$ si le tiroir k est vide et $Y_k = 0$ si le tiroir k est non vide.

On a alors :

- $Y = Y_1 + \cdots + Y_n$
- chaque Y_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}\left(X_k = 0\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p$.

On en déduit par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^p$$

4) Si $p \geqslant n$, on a $Y(\Omega) = \{0, \cdots, n-1\}$ et si $p < n$, on a $Y(\Omega) = \{n-p, \cdots, n-1\}$.

Dans les deux cas, $Y(\Omega) = \{\max\{0, n-p\}, \cdots, n-1\}$.

Soit $\ell \in Y(\Omega)$.

On va calculer sur des boules indiscernables.

On choisit les ℓ tiroirs vides : $\binom{n}{\ell}$ choix. Une fois les tiroirs choisis, on calcule le nombre de rangements favorables rapporté au nombre total de rangements.

Il y a $\frac{n^p}{p!}$ rangements au total, car chaque boule se range dans un tiroir et la division par $p!$ tient compte de l'indiscernabilité.

Pour les configurations favorables, on remplit les $n-\ell$ tiroirs avec une boule, puis on met les $p-(n-\ell)$ autres boules n'importe comment, ce qui fait : $\frac{(n-\ell)^{p+\ell-n}}{p!}$ possibilités.

Ainsi :

$$\mathbb{P}(Y=k) = \binom{n}{\ell}\frac{(n-\ell)^{p+\ell-n}}{n^p}$$

5 Exercice

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes définies de Ω vers $\mathbb{R}$.

1) On suppose que chaque X_k suit une loi de Bernoulli.

a) Montrer que si la covariance $\operatorname{Cov}(X_1, X_2)$ est nulle, alors les variables X_1 et X_2 sont indépendantes.

b) En déduire que si X et Y sont deux variables aléatoires définies de Ω vers $\mathbb{R}$ telles que $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont chacun de cardinal deux et la covariance $\operatorname{Cov}(X, Y)$ est nulle, alors X et Y sont indépendantes.

2) On suppose que chaque X_k suit une loi de Bernoulli.

Montrer que les variables $X_1, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si :

$$\mathbb{P}(X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 1) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 1)$$

3) On revient au cas général où les X_k ne suivent plus nécessairement une loi de Bernoulli, mais pour tout $k, 1 \in X_k(\Omega)$. L'équivalence de la question 2) reste-t-elle vraie ?

Solution

1-a) Comme X_1 et X_2 sont des lois de Bernoulli, alors :

$$\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = 1) - \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1).$$

On en déduit alors que X_1 et X_2 sont indépendantes (en utilisant les manipulations sur les événements contraires présentes dans la généralisation de la question 2).

b) Si $X(\Omega) = \{a, b\}$ et $Y(\Omega) = \{c, d\}$, en posant $Y_1 = \dfrac{X - b}{a - b}$ et $Y_2 = \dfrac{Y - d}{c - d}$, on en déduit que Y_1 et Y_2 prennent leurs valeurs dans $\{0, 1\}$.

De plus, $\operatorname{Cov}(X, Y) = \operatorname{Cov}(b + (a-b)Y_1, d + (c-d)Y_2) = (a-b)(c-d)\operatorname{Cov}(Y_1, Y_2)$ par bilinéarité et autres propriétés.

Comme $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$, alors $\operatorname{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$ et Y_1 et Y_2 sont indépendantes, puis X et Y aussi.

2) On montre par récurrence la propriété suivante :

« pour toute famille d'événements mutuellement indépendants $(A_i)_{i \in I}$, en modifiant n événements en leur contraire, la nouvelle famille obtenue reste indépendante. »

Lorsque $n = 0$, il n'y a rien à montrer.

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang n.

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants, où $(n+1)$ événements ont été modifiés.

Soit $J \subset I$ une partie finie. On distingue deux cas :

- si J contient strictement moins de $n+1$ indices d'événements modifiés, on peut directement utiliser l'hypothèse de récurrence
- sinon, on note $i_1, \cdots, i_{n+1}$ les $(n+1)$ indices des événements modifiés.

Alors, l'intersection sur les B_j, pour $j \in J$, est la différence $E \backslash F$ entre les deux ensembles suivants : E est l'intersection sur les B_j, pour $j \in J$ sauf i_{n+1} et F est l'intersection sur les B_j, pour $j \in J$, où $B_{i_{n+1}}$ reste égal à $A_{i_{n+1}}$.

L'hypothèse de récurrence est valable pour E et pour F, car moins de n événements ont été modifiés par rapport à la famille de départ. On obtient alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \prod_{j \text{ sauf } i_{n+1}} \mathbb{P}(B_j) - \prod_{j} \prod_{\text{sauf } i_{n+1}} \mathbb{P}(B_j) \times \mathbb{P}\left(A_{i_{n+1}}\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(B_j)$$

Ce résultat appliqué à $A_k = \{X_k = 1\}$, montre que pour tout $x_1, \cdots, x_n$ dans $\{0, 1\}$,

$$\mathbb{P}(\forall k, \quad X_k = x_k) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k)$$

3) Le résultat est faux sinon. Par exemple, si (X, Y) est de loi :

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/8$	0
0	0	0	$1/4$
1	$1/4$	0	$1/4$

6 Exercice

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B. On constate que le serveur A est choisi avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et donc que le serveur B est choisi avec la probabilité $q = 1 - p$. Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

La probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de $\frac{1}{10}$, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de $\frac{1}{20}$.

1. (a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier en fonction de p.
   (b) Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A ?

   Dans la suite de l'exercice, on considère un jour donné, appelé le jour 1. On note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $w = AAAABBAAAB\ldots$ signifie que les jours 1, 2, 3, 4 l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 5, 6 il a choisi le le serveur B, les jours 7, 8, 9 il a choisi le serveur A et le jour 10 a choisi le serveur B. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 4, une deuxième série de longueur 2, une troisième série de longueur 3 (ce qui est également le cas de la série $BBBBAABBBA\ldots$).

   On note $L_1(w), L_2(w)$ les variables aléatoires donnant la longueur de ces deux premières séries.
2. Déterminer la loi de L_1 et son espérance.
3. Déterminer la loi conjointe de (L_1, L_2). En déduire la loi de L_2. Les lois L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?

correction Pour tout entier $k \geqslant 1$, on note A_k (respectivement B_k) l'événement " le serveur A (respectivement B) est choisi au jour numéro k "

1. Si on note T l'événement "le serveur a commis une erreur de transmission ", A l'événement "le serveur A est choisi " et B l'événement " le serveur B est choisi ".
   (a) Les événements A et B forment un système complet d'événements donc
   $$\begin{aligned} P(T) &= P(A\cap T)+P(B\cap T) = P(A)P_A(T)+P(B)P_B(T) \\ &= p\times\frac{1}{10}+(1-p)\times\frac{1}{20} = \end{aligned}$$
   $$\boxed{\frac{p+1}{20}}$$
   (b) $P_T(A) = \dfrac{P(A\cap T)}{P(T)} = \dfrac{p\times\frac{1}{10}}{\frac{p+1}{20}} = \boxed{\dfrac{2p}{p+1}.}$
2. On a $(L_1 = k) = (A_1\cap\cdots\cap A_k\cap B_{k+1})\cup(B_1\cap\cdots\cap B_k\cap A_{k+1})$ donc
   $$P(L_1=k) = P(A_1\cap\cdots\cap A_k\cap B_{k+1})+P(B_1\cap\cdots\cap B_k\cap A_{k+1})$$
   (car ces deux événements sont clairement incompatibles) et les événements $(A_k, B_j)_{(k,j)\in(\mathbb{N}^2)^*}$ étant mutuellement indépendants, on a :
   $$P(L_1=k) = P(A_1)\cdots P(A_k)P(B_{k+1})+P(B_1)\cdots P(B_k)P(A_{k+1}) = p^kq+q^kp.$$
   Le calcul de l'espérance ne pose pas de difficulté deux sommes géométriques
   $$\underline{E(L_1) = \frac{p}{q}+\frac{q}{p}}$$
3. on calcule $P(L_1 = k, L_2 = l)$, en conditionnant par rapport au premier serveur choisi (ou en décrivant les suites qui conviennent), si on a le serveur A en premier , on a une série de k "A" puis une série de l "B" enfin un "A" pour terminer la deuxième série. de même pour le serveur "B" choisi en premier
   $$\underline{P(L_1=k, L_2=l) = p^{k+1}q^l+p^lq^{k+1}}$$
   on trouve la loi marginale par sommation
   $$P(L_2=l) = \sum_{k=1}^{+\infty}P(L_1=k, L_2=l) = \underline{p^2q^{l-1}+p^{l-1}q^2}$$
   Pour l'indépendance il suffit de considérer $P(L_1=1)\times P(L_2=1) = (2pq)(p^2+q^2)$ à comparer avec $P(L_1=1, L_2=1) = p^2q+pq^2 = pq$, on l'égalité seulement si $p=q=\frac{1}{2}$ et ceci étant vérifié , on a l'égalité pour tout k et l
   $$P(L_1=k, L_2=l) = 2p^{k+l+1} = 2p^{k+1}\times 2p^{l+1} = P(L_1=k)P(L_2=l)$$
   les variables aléatoires sont indépendantes si et seulement si $p=q=\frac{1}{2}$

7 Exercice

Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi $\mathcal{G}(p)$(loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$).

1. Déterminer la loi de la somme $S = X + Y$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(S = k)$ où k est un élément de $S(\Omega)$.
3. Soit Z une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et qui vérifie :

$$\exists p \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, P(Z > n + 1 \mid Z > n) = 1 - p.$$

   (a) Reconnaitre la loi de Z.

   (b) On suppose de plus que X,Y,Z sont mutuellement indépendantes. Déterminer $P(S = Z)$.

correction

1) Différentes méthodes : on pose $q = (1 - p)$.

• Par les fonctions génératrices : X et Y sont indépendantes , donc soit t tel que $\mid t \mid< 1$, on a :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = \frac{p^2t^2}{(1 - tq)^2}$$

Or $\displaystyle\frac{1}{1 - tq} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^kq^k$, donc par dérivation terme à terme $\displaystyle\frac{q}{(1 - tq)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} kt^{k-1}q^k$, finalement

$$G_{X+Y}(t) = p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1}t^{k+1}.$$

$$P(X + Y = k) = p^2(k - 1)q^{k-2}$$

• On peut interpréter la loi $X + Y$, comme la loi du deuxième succès dans une expérience de Bernoulli et revenir à des dénombrements.

• Ou encore

$$\begin{aligned}
P(X + Y = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} P((X = k) \cap (Y = n - k)) \quad \text{formule des probabilités totales}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} P(X = k)P(Y = n - k) \qquad \text{(indépendance de } X \text{ et } Y\text{)}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1}pq^{n-k-1}p\\
&= (n - 1)p^2q^{n-2}
\end{aligned}$$

2) Soit $k \in [\![2, +\infty[\![$. Si l'événement $(S = k)$ est observé, alors pour $i \geq k$, l'événement $(X = i)$ est de probabilité nulle. Pour $i \leq k - 1$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X = i \mid S = k) &= \frac{P((X = i) \cap (X + Y = k))}{P(S = k)}\\
&= \frac{P((X = i) \cap (Y = k - i))}{P(S = k)}\\
&= \frac{P(X = i)P(Y = k - i)}{P(S = k)}\\
&= \frac{q^{i-1}pq^{k-i-1}p}{(k - 1)p^2q^{k-2}} = \frac{1}{k - 1}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La loi de } X \text{ sachant } (S = k) \text{ est une loi uniforme sur } [\![1, k - 1]\!].}$

3a) $P(Z > n + 1) = P(Z > n + 1 \mid Z > n) \times P(Z > n) = (1 - p)P(Z > n)$

Or $P(Z > 0) = 1$ car la loi est à valeur dans $\mathbb{N}^*$.Donc

$$P(Z > n + 1) = (1 - p)^{n+1}$$

Et $P(Z = n) = P(Z > n - 1) - P(Z > n) = (1 - p)^{n-1} - (1 - p)^n = (1 - p)^{n-1}p$

On reconnait une loi géométrique de paramètre p.

3b)

$$\begin{aligned} P(S=Z) &= P(X+Y=Z) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P((X+Y=Z)\cap(Z=k)) \end{aligned}$$

Or (on démontre l'indépendance à la main)

$$\begin{aligned} P((X+Y=Z)\cap(Z=k)) &= P\left(\bigcup_{l=1}^{k-1}(X=l)\cap(Y=k-l)\cap(Z=k)\right) \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} P(X=l)P(Y=k-l)P(Z=k) \\ &= P(Z=k)\sum_{l=1}^{k-1} P(X=l)P(Y=k-l) \\ &= P(Z=k)P(X+Y=k) \end{aligned}$$

Finalement

$$P(S=Z)=\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}(k-1)p^2q^{k-2} = p^3\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)q^{2k-3}$$
$$= p^3q\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)(q^2)^{k-2} = p^3q\frac{1}{(1-q^2)^2}$$

$$\boxed{P(S=Z)=\frac{pq}{(1+q)^2}}$$

8 Exercice

Soient a et b deux entiers strictement positifs. Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On tire une poignée de n boules dans l'urne. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans la poignée.

1. Déterminer la loi de X.
2. Donner le principe d'une démonstration de la formule suivante où $n \leq a+b$:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}=\binom{a+b}{n}.$$

3. Calculer l'espérance de X.
4. Calculer la variance de X.

correction

1. On détermine d'abord le support de X : on ne peut évidement pas tirer plus de n boules blanches ,ni plus de boules blanches que dans l'urne : donc X est majoré par $\min(n,a)$,
Si $n \leq b$, la valeur minimale de X est 0 , on peut ne tirer que des boules noires, si $n > b$ on tire au moins $n-b$ boules blanches . toutes les valeurs intérmédiaires sont possibles :
le support de X est $[\![(\max(0,n-b),\min(n,a)]\!]$
On note $N=a+b$ le nombre total de boules , un événement est une partie à n éléments d'un ensemble à N éléments, toutes les poignées sont supposées équiprobables.
Si $k \in X(\Omega)$ alors il y a $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ poignées contentent k boules blanches parmi les a présentes et $n-k$ boules noires parmi les b présentes
donc

$$\boxed{\forall k \in X(\Omega)\ P(X=k)=\frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

2. soit on développe $(1+x)^{a+b}$ de deux manières différentes, soit on interprète le coefficient du binôme comme une partie à n éléments d'un ensemble $a+b$ éléments partagés en 2 parties disjointes à a et b éléments.
3. calcul de l'espérance :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

or $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

donc

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} a \frac{\binom{a-1}{k-1}\binom{b}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{a}{\binom{N}{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{a-1}{j}\binom{b}{n-1-j}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{a}{\binom{N}{n}} \binom{N-1}{n-1} = \frac{an}{N}}$$

4.

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(X=k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} a(a-1) \frac{\binom{a-2}{k-2}\binom{b}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{a(a-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=2}^{n} \binom{a-2}{j}\binom{b}{n-2-k}$$

$$= \frac{a(a-1)}{\binom{N}{n}} \binom{N-2}{n-2}$$

finalement

$$\boxed{E(X(X-1)) = \frac{a(a-1)n(n-1)}{N(N-1)}}$$

on en déduit la variance :

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{a(a-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{an}{N} - \frac{a^2n^2}{N^2} = n \times \frac{a}{N} \times (1 - \frac{a}{N}) \frac{N-n}{N-1}}$$

9 Exercice

Soient a et b deux entiers strictement positifs. On effectue dans une urne contenant initialement b boules banches et b boules noires une suite infinie de tirages avec remise, en rajoutant dans l'urne a boules blanches supplémentaires après chaque tirage ayant donné une boule blanche. Pour tout $n \geq 1$, on considère les événements suivants :

A_n : "les n premiers tirages donnent tous des boules blanches"

B : "on obtient lors de la suite de tirages au moins une boule noire"

$$C_n : \text{“on obtient pour la première fois une boule noire au } n^{\text{ième}} \text{ tirage”}$$

On note $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et
$p_n = P(A_n)$.

1. Justifier que pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = \dfrac{na+b}{na+2b} p_n$.
2. Étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.
3. Déterminer $P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$ et $P(B)$.
4. Exprimer pour tout $n \geq 1$, $P(C_n)$ en fonction de termes de la suite $(p_k)_{k \geq 1}$.

correction

1. Notons E_n l'événement "le n ième tirage" donne une boule blanche. On a alors $A_{n+1} = A_n \cap E_{n+1}$. Si $P(A_n) = 0$ alors $P(A_{n+1}) = 0$ car $A_{n+1} \subset A_n$. La relation donnée est vraie (remarque , intuitivement $P(A_n) \neq 0$ car il est toujours possible de ne tirer que des boules blanches en n tirages.)
   Si $P(A_n) \neq 0$ alors $P(A_{n+1}) = P(A_n \cap E_{n+1}) = P(E_{n+1} \mid A_n)P(A_n)$.
   Si A_n est réalisé, on a tiré que des boules blanches et donc ajouté na boules blanches à l'urne qui contient au moment du $(n+1)$ ième tirage $b + na$ boules blanches pour un total de $2b + na$ boules. ,donc
   $P(E_{n+1} \mid A_n) = \dfrac{na+b}{na+2b}$ (équiprobabilité des tirages). et on a
   $$p_{n+1} = \frac{na+b}{na+2b} p_n$$
2. La série $\sum \ln\left(\dfrac{na+2b}{na+b}\right)$ est à termes positifs et
   $\ln\left(\dfrac{na+2b}{na+b}\right) = \ln\left(\dfrac{1+\frac{2b}{na}}{1+\frac{b}{na}}\right) \sim \dfrac{b}{na}$, qui est le terme d'une serie de Riemann divergente. Donc $\sum \ln\left(\dfrac{na+2b}{na+b}\right)$ diverge. De plus
   $$\sum_{k=1}^{n} \ln(p_{k+1}) - \ln(p_k) = -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{ka+2b}{ka+b}\right) = \ln p_{n+1} - \ln p_1$$
   donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln p_n = -\infty$.
   $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = 0}$$
3. A la question 1 on a remarqué que $A_{n+1} \subset A_n$ donc $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'événements décroissants donc :
   $$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n)\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n) = 0.$$
   D'autre part
   $$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bar{A}_n = \overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n}$$
   donc $P(B) = 1$.
4. On a $C_1 = \bar{A}_1$ donc $P(C_1) = 1 - p_1$. Pour $n \geq 2$, $C_n = A_{n-1} \cap \bar{A}_n$.
   Or $A_n \subset A_{n-1}$ donc $\bar{A}_{n-1} \subset \bar{A}_n$, Donc $C_n = A_{n-1} \setminus A_n$ (un dessin est aussi correct c'est la clef de la démonstration de la limite décroissante)
   $$P(C_n) = p_{n-1} - p_n$$

10 Exercice

Soit $p \in]0,1[$. On dispose d'une pièce donnant $\ll$ pile $\gg$ avec la probabilité p. On la lance jusqu'à obtenir pour la deuxième fois $\ll$ pile $\gg$. Soit X le nombre de $\ll$ face $\gg$ obtenus au cours de cette expérience.

a) Déterminer la loi de X.

b) Montrer que X admet une espérance, et la calculer.

c) On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne et l'on tire une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y et son espérance.

d) On pose $Z = X - Y$, donner la loi de Z.Z et Y sont-elles indépendantes ?

Solution a) $\cdot$ D'abord $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

- Puis l'événement $(X = k)$ est caractérisé par (on utilise l'indépendance) :

$\rightarrow$ le fait qu'il y ait eu $k+2$ tours, parmi lesquels P est tombé 2 fois (probabilité p^2) ;

$\rightarrow$ l'emplacement des k tours où F est tombé, parmi $k+1$ sites (le dernier est nécessairement P) :

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} k+1 \\ k \end{pmatrix} = (k+1)$ choix ;

$\rightsquigarrow$ probabilité $(1-p)^k$.

En conclusion, $P(X = k) = (k+1)p^2q^k$ avec $q = 1-p$.

b) On doit examiner la CV/somme de $\sum\limits_{k\geqslant 0}(k+1)kp^2q^k$:

$\rightarrow$ le terme général est $O\left(1/k^2\right)$ vu$|q| < 1$.

$\rightsquigarrow$ l'espérance est finie et vaut donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)kp^2q^k = p^2\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)kq^k.$$

- En dérivant deux fois le développement géométrique on peut montrer que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)kx^{k-1} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

On trouve ainsi que $E[X] = \dfrac{2(1-p)}{p}$

c) On sait que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(Y \in \cdot \mid X = n)$ est uniforme sur l'ensemble $[\![0;n]\!]$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(Y = k \mid X = n)P(X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n+1}(n+1)p^2q^n = p^2\sum_{n=k}^{+\infty}q^n = pq^k$$

donc $1+Y$ est géométrique donc $E[Y] = \dfrac{1}{p} - 1$.

d) Elles sont indépendantes, si $(i,j) \in \mathbb{N}^2$:

$$P(Z = i, Y = j) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z = i, Y = j \mid X = n)P(X = n)$$

Un seul terme de la somme est non nul, c'est celui pour $n = i+j$, la proba précédente vaut :

$P(Z = i, Y = j \mid X = i+j)P(X = i+j) = P(Z = i \mid X = i+j)P(X = i+j) = p^2(1-p)^{i+j} = P(Z = i)P(Y = j)$.

11 Exercice

- Un enquêteur d'un institut de sondage dispose d'une liste de n personnes à appeler par téléphone. Il les appelle en une vague, successivement et indépendamment, la probabilité d'établir un contact par appel est supposée constante de valeur $p \in]0,1[$.

- On note X_1 la variable aléatoire indiquant le nombre de correspondants contactés lors de la première vague. Lors de la seconde vague, l'enquêteur rappelle les $n - X_1$ correspondants non contactés, on note X_2 le nombre de contactés lors de cette seconde vague, etc.

a) X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

b) Trouver les lois des variables aléatoires :

(i) Y_i : numéro de la vague où le i-ème correspondant est contacté ;

(ii) X_1 et X_2 ;

(iii) X_k pour $k \geqslant 3$;

(iv) $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ pour $k \geqslant 2$.

d) En moyenne, combien de vagues faudra-t-il pour joindre tous les correspondants ?

Correction.

a) Non car $P\left(X_1=n \text{ et } X_2=n\right)=0$ alors que $P\left(X_1=n\right)>0$ (binomiale) et $P\left(X_2=n\right)=P\left(X_2= n \text{ et } X_1=0\right)= P\left(X_2=n \mid X_1=0\right) P\left(X_1=0\right)>0$ car $P\left(X_2 \in \cdot \mid X_1=0\right)$ est $\mathscr{B}(n, p)$ et $P\left(X_1=0\right)>0$.

b) (i) Elle suit une loi géométrique de paramètre p (loi du premier succès), càd :

$$P\left(Y_i=k\right)=p(1-p)^{k-1}$$

(ii) $-X_1$ est binomiale.

- Pour X_2 si on veut on peut directement faire traiter comme dans la question d'après, mais moi je différencierai pour voir.

- Comme on a vu $X_1 \sim \mathscr{B}(n, p)$. Soit $k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$ alors, vu $P\left(X_2=k \mid X_1=i\right)=0$ si $k>n-i$:

$$\begin{aligned}
P\left(X_2=k\right) & =\sum_{i=0}^{n-k} P\left(X_2=k \mid X_1=i\right) P\left(X_1=i\right) \\
& =\sum_{i=0}^{n-k}\left(\begin{array}{c}
n-i \\
k
\end{array}\right) p^k(1-p)^{n-i-k}\left(\begin{array}{c}
n \\
i
\end{array}\right) p^i(1-p)^{n-i} \\
& =p^k(1-p)^k\left(\begin{array}{c}
n \\
k
\end{array}\right)\left(p+(1-p)^2\right)^{n-k} \\
& =q^k(1-q)^{n-k}\left(\begin{array}{c}
n \\
k
\end{array}\right)
\end{aligned}$$

binomiale de paramètre $q=p-p^2$.

(iii) On peut écrire :

$$X_k=\sum_{i=1}^n 1_{\left\{Y_i=k\right\}}$$

Les $1_{\left\{Y_i=k\right\}}$ sont des Bernoulli indépendantes de paramètre $p(1-p)^{k-1}$ donc :

$$X_k \sim \mathscr{B}\left(n, p(1-p)^{k-1}\right)$$

(iv) Pareil :

$$S_k=\sum_{i=1}^n 1_{\left\{Y_i \leqslant k\right\}}$$

avec $1_{\left\{Y_i \leqslant k\right\}}$ Bernoulli indépendantes de paramètre :

$$P\left(Y_i \leqslant k\right)=\sum_{j=1}^k p(1-p)^{j-1}=1-(1-p)^k$$

Ainsi $S_k \sim \mathscr{B}\left(n, 1-(1-p)^k\right)$.

c) Soit T la variable aléatoire désignant le numéro de la dernière vague, alors si $k \in \mathbb{N}^*$ et par indépendance :

$$P(T \leqslant k)=P\left(Y_1 \leqslant k, \ldots, Y_n \leqslant k\right)=\left(P\left(Y_1 \leqslant k\right)\right)^n=\left(1-q^k\right)^n$$

en notant $q=1-p$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
P(T=k) & =P(T \leqslant k)-P(T \leqslant k-1) \\
& =\left(1-q^k\right)^n-\left(1-q^{k-1}\right)^n \\
& =\sum_{j=0}^n\left(\begin{array}{l}
n \\
j
\end{array}\right)(-1)^j q^{(k-1) j}\left(q^j-1\right)
\end{aligned}$$

et le terme pour $j=0$ s'annule, on peut faire partir de 1 . Ainsi :

$$\begin{aligned}
E[T] & =\sum_{k=1}^{+\infty} k P(T=k) \\
& =\sum_{j=1}^n\left(\begin{array}{l}
n \\
j
\end{array}\right)(-1)^j\left(q^j-1\right) \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(q^j\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

or si $|x|<1$ on sait que $\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^{2}}$. Finalement, on trouve :

$$E[T]=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j} \frac{(-1)^{j+1}}{1-q^{j}}$$

12 Exercice

Soit $n \geq 2, p \in]0,1[$, et $X_{1}, \ldots, X_{n}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Soit $U \in \mathcal{M}_{n, 1}(\{0,1\})$ et $M \in \mathcal{M}_{n}(\{0,1\})$ définis par

$$U=\left(\begin{array}{c} X_{1} \\ \vdots \\ X_{n} \end{array}\right), M=U\left(U^{T}\right)$$

1. Trouver la loi de probabilité de $\operatorname{rg}(M)$ et de $\operatorname{Tr}(M)$.
2. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?
3. Si $V=\left(\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array}\right)$, on note S la variable aléatoire $S=V^{T} M V$. Calculer l'espérance et la variance de S pour $n=2$.

Solution

1. Si $U=0, \operatorname{rg}(M)=0$, sinon $\operatorname{rg}(M)=1$, donc $\operatorname{rg}(M) \sim \mathcal{B}\left(1-(1-p)^{n}\right)$.
$\operatorname{Tr}(M)=\sum X_{i}^{2}$? ? $X_{i}^{2} \sim \mathcal{B}(p)$, donc $\operatorname{Tr}(M)=\mathcal{B}(n, p)$.
2. $M^{2}=\operatorname{Tr}(M) M$, donc M est idempotente ssi $\operatorname{Tr}(M)=0$ ou 1, avec probabilité $(1-p)^{n-1}(1+(n-1) p)$.
3.
<u>1e méthode</u> : On remarque que si $r, s, t \in \mathbb{N}^{*}$ et si i, j, k sont distincts, $X_{i}^{r} \sim \mathcal{B}(p), X_{i}^{r} X_{j}^{s} \sim \mathcal{B}\left(p^{2}\right)$ et $X_{i}^{r} X_{j}^{s} X_{k}^{t} \sim \mathcal{B}\left(p^{3}\right)$. On en déduit que

$$\begin{gathered} \operatorname{Cov}\left(X_{i}^{2}, X_{i}^{2}\right)=\operatorname{Var}\left(X_{i}^{2}\right)=p-p^{2}, \operatorname{Cov}\left(X_{i}^{2}, X_{i} X_{j}\right)=p^{2}-p^{3} \\ \operatorname{Cov}\left(X_{i} X_{j}, X_{i} X_{j}\right)=\operatorname{Var}\left(X_{i} X_{j}\right)=p^{2}-p^{4}, \operatorname{Cov}\left(X_{i} X_{j}, X_{i} X_{k}\right)=p^{3}-p^{4} . \end{gathered}$$

Si $n=2, M=\left(\begin{array}{cc} X_{1}^{2} & X_{1} X_{2} \\ X_{2} X_{1} & X_{2}^{2} \end{array}\right), S=X_{1}^{2}+X_{2}^{2}+2 X_{1} X_{2}$ et $E(S)=p+p^{2}+p^{2}+p=2\left(p+p^{2}\right)$.
Par bilinéarité,

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(S)=\operatorname{Cov}(S, S) & =\operatorname{Var}\left(X_{1}^{2}\right)+\operatorname{Var}\left(X_{2}^{2}\right)+4 \operatorname{Var}\left(X_{1} X_{2}\right)+4 \operatorname{Cov}\left(X_{1}^{2}, X_{1} X_{2}\right)+4 \operatorname{Cov}\left(X_{2}^{2}, X_{1} X_{2}\right) \\ & =\left(p-p^{2}\right)+\left(p-p^{2}\right)+4\left(p^{2}-p^{4}\right)+4\left(p^{2}-p^{3}\right)+4\left(p^{2}-p^{3}\right) \\ & =2\left(p+5 p^{2}-4 p^{3}-2 p^{4}\right) \end{aligned}$$

$\frac{\text{2e méthode}}{E\left(Y^{2}\right)^{2}} S=Y^{2}$ avec $Y=X_{2}+X_{2}$. On a $Y \sim \mathcal{B}(2, p), E(S)=E\left(Y^{2}\right), \operatorname{Var}(S)=E\left(Y^{4}\right)-E\left(Y^{2}\right)^{2}$.
Fonction génératrice des moments $\phi_{Y}(t)=E\left(e^{t Y}\right)=\left(1+p\left(e^{t}-1\right)\right)^{n}$. Si $n=2$,

$$\begin{aligned} \phi(t) & =1+2 p\left(e^{t}-1\right)+p^{2}\left(e^{t}-1\right)^{2} \\ & =1+2 p t+\left(p+p^{2}\right) t^{2}+\left(\frac{p}{3}+p^{2}\right) t^{3}+\left(\frac{p}{12}+\frac{7}{12} p^{2}\right) t^{4}+o\left(t^{4}\right) \end{aligned}$$

donc $E\left(Y^{2}\right)=2 p+2 p^{2}, E\left(Y^{4}\right)=2 p+14 p^{2}, \operatorname{Var}(S)=2 p+10 p^{2}-8 p^{3}-4 p^{4}$
Sin est quelconque :

$$\begin{aligned} \phi(t)= & 1+n p t+\left(\frac{1}{2} n p+\frac{n(n-1)}{2} p^{2}\right) t^{2}+\left(\frac{1}{6} n p+\frac{n(n-1)}{2} p^{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6} p^{3}\right) t^{3} \\ & +\left(\frac{1}{24} n p+\frac{7 n(n-1)}{24} p^{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{4} p^{3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} p^{4}\right) t^{4}+o\left(t^{4}\right), \end{aligned}$$

donc $E\left(Y^{2}\right)=n p+n(n-1) p^{2}, E\left(Y^{4}\right)=n p+7 n(n-1) p^{2}+6 n(n-1)(n-2) p^{3}+n(n-1)(n-2)(n-3) p^{4}$ et $\operatorname{Var}(S)=n p+n(6 n-7) p^{2}+4 n(n-1)(n-3) p^{3}-2 n(n-1)(2 n-3) p^{4}$

13 exercice

Toutes les variables aléatoires ci-dessous sont définies sur le même espace probabilisé. On note g_{X} la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1°) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que l'on peut définir une fonction ϕ_{X} continue sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_{\mathrm{X}}(t) = g_{\mathrm{X}}\left(\mathrm{e}^{it}\right)$$

Montrer que $\phi_{\mathrm{X}}(t) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{it\mathrm{X}}\right)$.

2°) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que si $\phi_{\mathrm{X}} = \phi_{\mathrm{Y}}$ alors X et Y ont la même loi. On pourra calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \phi_{\mathrm{X}}(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3°) On considère (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module 1 on a $\lim\limits_{n\to+\infty} g_{\mathrm{X}_n}(z) = g_{\mathrm{Y}}(z)$. Montrer que (X_n) converge en loi vers Y c'est-à-dire que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_n = m\right) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} = m)$$

4°) Soit $\lambda \in [0,1]$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la variable aléatoire S_n en posant

$$\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_{1,n} + \mathrm{X}_{2,n} + \cdots + \mathrm{X}_{n,n}$$

somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi Bernoulli de paramètre $\dfrac{\lambda}{n+1}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ de module 1 ; calculer $g_{\mathrm{S}_n}(z)$ puis

$$\lim_{n\to+\infty} g_{\mathrm{S}_n}(z)$$

Qu'en déduisez-vous ?

Solution 1°) La série entière ci-dessous

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} = n)t^n$$

converge normalement (donc uniformément) sur le disque unité puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{C}, \quad (|t| \leqslant 1) \quad \Longrightarrow \quad |\mathrm{P}(\mathrm{X} = n)t^n| \leqslant \mathrm{P}(\mathrm{X} = n)$$

et $\sum \mathrm{P}(\mathrm{X} = n)$ converge. Comme les fonctions $f_n : t \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X} = n)\mathrm{e}^{int}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction ϕ_{X} est continue sur $\mathbb{R}$.

Le théorème du transfert assure alors que

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{it\mathrm{X}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{itn}\mathrm{P}(\mathrm{X} = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{it}\right)^n \mathrm{P}(\mathrm{X} = n) = g_{\mathrm{X}}\left(\mathrm{e}^{it}\right)$$

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Commençons par noter que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{imt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{im}\left[\mathrm{e}^{imt}\right]_0^{2\pi} = 0$$

et cette intégrale vaut 2π si $m = 0$. Ainsi, comme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{-int}\phi_{\mathrm{X}}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} = k)\mathrm{e}^{it(k-n)}$$

la convergence normale assure que l'échange somme intégrale est possible :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-int}\phi_{\mathrm{X}}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} = k)\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it(k-n)}\mathrm{d}t = \mathrm{P}(\mathrm{X} = n)$$

On en déduit finalement que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(\mathrm{X} = n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-int}\phi_{\mathrm{X}}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-int}\phi_{\mathrm{Y}}(t)\mathrm{d}t = \mathrm{P}(\mathrm{Y} = n)$$

si bien que X et Y ont la même loi.

3°) Il s'agit de montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_n = m\right) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} = m)$$

Soit $m \in \mathbb{N}$. On a

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_n = m\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-imt} \phi_{\mathrm{X}_n}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-imt} g_{\mathrm{X}_n}\left(\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{d}t.$$

On note que pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a par hypothèse que

$$\mathrm{e}^{-imt} g_{\mathrm{X}_n}\left(\mathrm{e}^{it}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-imt} g_{\mathrm{Y}}\left(\mathrm{e}^{it}\right)$$

et par ailleurs

$$\left|\mathrm{e}^{-imt} g_{\mathrm{X}_n}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right| \leqslant \left|g_{\mathrm{X}_n}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\right| \leqslant g_{\mathrm{X}_n}(1) \leqslant 1$$

ce qui permet d'avoir l'hypothèse de domination étant donné que $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$. On déduit du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_n = m\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-imt} g_{\mathrm{Y}}\left(\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{d}t = \mathrm{P}(\mathrm{Y} = m)$$

On a donc bien la convergence en loi de (X_n) vers Y.

4°) Calculons la série génératrice de S_n. Comme les variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, on a

$$g_{\mathrm{S}_n}(u) = \left(g_{\mathrm{X}_{1,n}}(u)\right)^n = \left(1 - \frac{\lambda}{n+1} + \frac{\lambda}{n+1} u\right)^n = \left(1 + \frac{\lambda}{n+1}(u-1)\right)^n$$

et

$$g_{\mathrm{S}_n}(u) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\lambda(u-1)} = g_{\mathrm{Z}}(u)$$

où Z suit une loi de Poisson de paramètre λ. En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a

$$\left(1 + \frac{z}{n+1}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^z$$

Posons $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$1 + \frac{z}{n+1} = 1 + \frac{a}{n+1} + i \frac{b}{n+1}.$$

Comme ce complexe converge vers 1, il sera non nul pour n assez grand et aura un argument θ_n dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; et on a

$$\tan\left(\theta_n\right) = \frac{b}{a+n+1} \quad \text{puis} \quad \theta_n = \arctan\left(\frac{b}{a+n+1}\right).$$

Par ailleurs, on a

$$\left|1 + \frac{z}{n+1}\right| = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^2 + \frac{b^2}{(n+1)^2}}$$

et donc

$$\left(1 + \frac{z}{n+1}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^2 + \frac{b^2}{(n+1)^2}\right)^{n/2} \mathrm{e}^{ni \arctan\left(\frac{b}{a+n+1}\right)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^z$$

puisque

$$\left(1 + \frac{2a}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2}\left(\frac{2a}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \mathrm{e}^{a + \mathrm{o}(1)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^a.$$

14 Exercice

- Toutes les variables aléatoires qui suivent sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

1°) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que la variable aléatoire $2^{-\mathrm{Z}}$ admet une espérance. On la note $r(\mathrm{Z})$.

On suppose dans toute la suite de l'exercice que la loi de Z est donnée par $\mathrm{P}(\mathrm{Z}=n)=\dfrac{1}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2°) Montrer que l'on définit ainsi une loi de probabilité et calculer $r(\mathrm{Z})$.

Soit $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que Z.

Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_q=\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \mathrm{X}_i$.

3°) a) Montrer que la loi de S_q est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}\left(\mathrm{S}_q=n\right)=\binom{n+q-1}{q-1} \frac{1}{2^{n+q}}.$$

b) Calculer $r\left(\mathrm{~S}_q\right)$. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+q-1}{q-1} \frac{1}{4^n}=\left(\frac{4}{3}\right)^q$$

3°) On suppose dans cette question que Z représente le nombre de lapins devant naitre d'un couple de lapins. Chaque lapereau a la probabilité $\dfrac{1}{2}$ d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres. On note F la variable aléatoire représentant le nombre de femelles qui vont naitre. Déterminer la loi de F ainsi que son espérance.

Solution

1°) Étant donné que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}=n)}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$$

on déduit du théorème de comparaison que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}=n)}{2^n}$ converge. On en déduire que $2^{-\mathrm{Z}}$ admet une espérance.

2°a) On vérifie que $\mathrm{P}(\mathrm{Z}=n)=\dfrac{1}{2^{n+1}} \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}=1$. On définit bien une loi de probabilité.

On note que Z suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Grâce à la formule du transfert

$$r(\mathrm{Z})=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \mathrm{P}(\mathrm{Z}=n)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}.$$

2°b) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Comme les variables de la suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes de même loi que Z, on obtient

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{S}_q}(s) &= \prod_{k=1}^{q} g_{\mathrm{X}_k}(s) \\ &= \left(g_{\mathrm{Z}}(s)\right)^q \end{aligned}$$

Or, la série génératrice de Z donne $g_{\mathrm{Z}}(s)=\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{2^n}=\frac{1}{2-s}$ si bien que

$$g_{\mathrm{S}_q}(s)=\frac{1}{2^q}\left(1-\frac{s}{2}\right)^{-q}$$

Il suffit alors le développer en série entière la fonction $t \mapsto \left(1-\dfrac{s}{2}\right)^{-q}$ pour avoir la loi de S_q :

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{S}_q}(s) &= \frac{1}{2^q}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-q)(-q-1)\cdots(-q-n+1)}{n!} \frac{(-1)^n s^n}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{2^q}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(q+n-1)!}{(q-1)!n!} \frac{s^n}{2^n}\right) \end{aligned}$$

$$g_{\mathrm{S}_q}(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+q-1}{q-1} \frac{s^n}{2^{n+q}}.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}\left(\mathrm{S}_q = n\right) = \begin{pmatrix} n+q-1 \\ q-1 \end{pmatrix} \frac{1}{2^{n+q}}$$

2°c) Le calcul est direct ; l'indépendance des variables donne

$$r\left(\mathrm{S}_q\right) = \mathrm{E}\left(2^{-\mathrm{S}_q}\right) = \prod_{k=1}^{q} \mathrm{E}\left(2^{-\mathrm{X}_k}\right) = \prod_{k=1}^{q} \mathrm{E}\left(2^{-\mathrm{Z}}\right) = r(\mathrm{Z})^q = \left(\frac{2}{3}\right)^q$$

Menons le calcul autrement vu que l'on connait la loi de S_q. La formule du transfert donne

$$\begin{aligned} r\left(\mathrm{S}_q\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \mathrm{P}\left(\mathrm{S}_q = n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} n+q-1 \\ q-1 \end{pmatrix} \frac{1}{2^{n+q}} \\ r\left(\mathrm{S}_q\right) &= \frac{1}{2^q} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} n+q-1 \\ q-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En regroupant les deux formules on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} n+q-1 \\ q-1 \end{pmatrix} = \left(\frac{4}{3}\right)^q$$

3°) Calculons la loi de F. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $((\mathrm{Z}=n))_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{F}=k \mid \mathrm{Z}=n)\mathrm{P}(\mathrm{Z}=n)$$

On élimine les termes assurément nuls

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{F}=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{F}=k \mid \mathrm{Z}=n)\mathrm{P}(\mathrm{Z}=n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{1}{2^{2n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix} \frac{1}{2^{2n+2k+1}} \\ \mathrm{P}(\mathrm{F}=k) &= \frac{1}{2} \frac{1}{4^k} \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix} \frac{1}{4^n} \end{aligned}$$

puis, avec le calcul de la question précédente

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}=k) = \frac{1}{2} \frac{1}{4^k} \left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

On en déduit que F suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{2}{3}$. En calculant son espérance, on obtient

$$\mathrm{E}(\mathrm{F}) = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1}{2}.$$

En effet, pour tout $t \in]-1, 1[$, on a

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \quad \text{puis} \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n t^{n-1} \quad \text{puis} \quad \frac{t}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n t^n$$

15 Exercice

On considère une urne contenant deux boules vertes et une boule noire, dans laquelle on effectue des tirages successifs et illimités. A chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne, ainsi qu'une boule supplémentaire de la même couleur.

On définit les variables aléatoires suivantes :

- X (resp. Y) est le rang d'arrivée de la première boule verte (resp. noire).
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*, U_n$ est la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on a obtenu une boule verte au n-ième tirage, et 0 sinon.
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*, Z_n$ est le nombre de boules vertes obtenues après n tirages.

1. Déterminer la loi des variables aléatoires X et Y.

2. (a) Pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$, exprimer Z_n en fonction de certaines des variables aléatoires $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer $Z_n(\Omega)$.

(b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in Z_n(\Omega)$, la probabilité conditionnelle :

$$P\left(U_{n+1}=1 \mid Z_n=k\right).$$

(c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, U_n$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $2/3$.

3. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_n.

Solution

1. On voit sans difficulté que $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(X=k)=\bigcap_{i=1}^{k-1} N_i \cap V_k$$

et les probabilités composées donnent :

$$P(X=k)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\cdots\times\frac{k-1}{k+1}\times\frac{2}{k+2}=\frac{(k-1)!\times 2}{\frac{(k+2)!}{2}}=\frac{4}{k(k+1)(k+2)}$$

De la même manière on obtient $Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$$P(Y=k)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{k}{k+1}\times\frac{1}{k+2}=\frac{k!}{\frac{(k+2)!}{2}}=\frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

2. (a) On a de manière évidente $Z_n=\sum_{i=1}^{n} U_i$ et $Z_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$.

(b) Sachant $(Z_n=k)$, après n tirages on a tiré k boules vertes et par suite $(n-k)$ boules noires, donc l'urne contient pour le $(n+1)$-ème tirage exactement $k+2$ boules vertes et $(n-k+1)$ boules noires, pour un total de $n+3$ boules. On en déduit donc que

$$P\left(U_{n+1}=1 \mid Z_n=k\right)=\frac{k+2}{n+3}$$

(c) On travaille par récurrence forte car pour déterminer la loi de U_{n+1}, on a besoin de Z_n donc de tous les U_i précédents. L'initialisation à $n=1$ est évidente, et on suppose alors que tous les U_k pour k allant de 1 à n suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{3}$. On a alors :

$$\begin{aligned}P\left(U_{n+1}=1\right)&=\sum_{k=0}^{n} P\left(U_{n+1}=1 \cap Z_n=k\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k+2}{n+3} P\left(Z_n=k\right)\\&=\frac{1}{n+3}\sum_{k=0}^{n} kP\left(Z_n=k\right)+\frac{2}{n+3}\sum_{k=0}^{n} P\left(Z_n=k\right)=\frac{E\left(Z_n\right)}{n+3}+\frac{2}{n+3}\end{aligned}$$

De plus on a supposé que tous les U_i, pour i entre 1 et n, suivent la loi de Bernoulli de paramète $2/3$, donc par linéarité de l'espérance

$$E\left(Z_n\right)=\sum_{i=1}^{n} E\left(U_i\right)=\frac{2}{3}n$$

et enfin :

$$P\left(U_{n+1}=1\right)=\frac{\frac{2}{3}n+2}{n+3}=\frac{2}{3}$$

ce qui conclut l'hérédité.

Remarque : on peut aussi conditionner par le premier tirage pour et la situation conditionnelle sachant le premier tirage au rang $n+1$ est donnée par le rang n (à condition d'avoir posé une hypothèse de récurrence avec des nombres de boules vertes et noires quelconques, puisque le nombre de boules de départ après conditionnement a changé).

3. On a déjà vu que $Z_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$, on s'intéresse alors à l'évènement $(Z_n = k)$ pour k fixé dans $[\![0, n]\!]$.

Sur le modèle de la loi binomiale, cet évènement est la réunion incompatible de $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ (comme le nombre de manières de choisir les tirages donnant des boules vertes) "séquences" d'intersection d'évènements successifs de la forme B_i et N_j, avec exactement k évènements B_i et $(n-k)$ évènements N_j. Ces séquences ont toutes la même probabilité ; en effet la probabilité de chaque séquence s'obtient par probabilités composées comme un produit de n fractions avec :

- les dénominateurs qui partent de 3 et se finissent à $n+2$, donc qui valent toujours $\dfrac{(n+2)!}{2}$.

- les numérateurs, en les réordonnant avec d'abord tous ceux correspondants à l'arrivée des boules vertes, puis tous ceux correspondants à l'arrivée des boules noires, qui valent toujours :

$$2 \times \cdots \times (k+1) \times 1 \times \cdots \times (n-k) = (k+1)! \times (n-k)!$$

Finalement on en déduit que :

$$P(Z_n = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \times \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \frac{2n!(k+1)!(n-k)!}{k!(n-k)!(n+2)!} = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$$

16 Exercice

Soit n un entier naturel non nul. On dispose d'une urne contenant des boules blanches et des boules noires, de contenance illimitée. On dispose également d'une réserve infinie de boules blanches et de boules noires. Pour tout entier naturel j, on dit que l'urne est dans l'état j lorsqu'elle contient j boules blanches et $(j+2)$ boules noires.

On réalise une succession d'épreuves, chaque épreuve se déroulant selon le protocole suivant :

- Au départ, l'urne est dans l'état n.

- Pour tout entier naturel j non nul, si l'urne est dans l'état j, on extrait une boule au hasard de l'urne.

- Si l'on obtient une boule blanche, alors cette boule n'est pas remise dans l'urne et on enlève de plus une boule noire de l'urne, l'urne est alors dans l'état $(j-1)$.

- Si l'on obtient une boule noire, alors cette boule est remise dans l'urne et on remet en plus une boule blanche et une boule noire dans l'urne, l'urne est alors dans l'état $(j+1)$.

1. On suppose dans cette question uniquement que $n \geqslant 2$ et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne après la deuxième épreuve. Déterminer la loi de X.

2. On décide que les tirages s'arrêtent dès que l'urne ne contient plus de boules blanches.

Pour tout j de $\mathbb{N}$, on note alors E_j l'évènement : «l'urne est dans l'état j initialement et les tirages s'arrêtent au bout d'un temps fini ˇ. On pose $e_j = P(E_j)$.

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e_n = \frac{n}{2n+2} e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2} e_{n+1}$$

(b) Montrer que la suite (e_n) converge vers une limite ℓ qu'on ne cherchera pas à déterminer.

(c) Déterminer l'expression de e_n en fonction de n et de ℓ (on pourra faire intervenir la suite $\big((n+1)e_n\big)_{n\in\mathbb{N}}\big)$.

Solution

1. On part de l'état n et on fait deux tirages, on a pu :

- tirer deux boules blanches et se retrouver dans l'état $n-2$.

- tirer deux boules noires et se retrouver dans l'état $n+2$.

- tirer une blanche et une noire (quel que soit l'ordre) et se retrouver dans l'état n.

On en déduit que $X(\Omega) = \{2n-2, 2n+2, 2n+6\}$

et

$(X = 2n-2) = B_1 \cap B_2 \quad , \quad (X = 2n+6) = (N_1 \cap N_2) \quad , \quad (X = 2n+2) = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$

qui donnent :

$$P(X = 2n-2) = \frac{n(n-1)}{(2n+2)(2n)} \quad , \quad P(X = 2n+6) = \frac{(n+2)(n+3)}{(2n+2)(2n+4)}$$

et

$$P(X = 2n+2) = \frac{n(n+1)}{(2n+2)(2n)} + \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+2)(2n+4)}$$

2. (a) On reconnaît dans $\dfrac{n}{2n+2}$ et $\dfrac{n+2}{2n+2}$ les probabilités d'obtenir une boule blanche/noire au premier tirage. Avec le sce (B_1, N_1) on obtient alors :

$$e_n = \frac{n}{2n+2} P_{B_1}(E_n) + \frac{n+2}{2n+2} P_{N_1}(E_n)$$

Reste à réfléchir à la situation : sachant B_1, on recommence la même expérience avec un décalage d'un tirage, mais en partant de l'état $n-1$. Comme le décalage d'un tirage n'a aucune influence sur le fait que les tirages se terminent en temps fini on obtient :

$$P_{B_1}(E_n) = P(E_{n-1}) = e_{n-1}$$

et de même $P_{N_1}(E_n) = e_{n+1}$, ce qui termine la question.

(b) La suite est bornée (ce sont des probabilités), on va chercher à prouver qu'elle est monotone. Les premiers termes sont $e_0 = 1$, et e_1 qui est une probabilité donc on a $e_1 \leqslant e_0$: on va prouver par récurrence, à l'aide de la question précédente, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, e_n \leqslant e_{n-1}$$

- l'initialisation est évidente avec ce qui précède.
- On suppose que $e_n \leqslant e_{n-1}$ et on se sert de la question précédente pour reconstruire e_n et e_{n+1} : on multiplie par $\dfrac{n}{2n+2}$ puis on ajoute $\dfrac{n+2}{2n+2}e_{n+1}$ et on a :

$$\frac{n}{2n+2}e_n + \frac{n+2}{2n+2}e_{n+1} \leqslant \frac{n}{2n+2}e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2}e_{n+1}$$

donc :

$$\frac{n}{2n+2}e_n + \frac{n+2}{2n+2}e_{n+1} \leqslant e_n$$

et enfin en passant tous les e_n à droite :

$$\frac{n+2}{2n+2}e_{n+1} \leqslant \frac{n+2}{2n+2}e_n \quad \text{puis} \quad e_{n+1} \leqslant e_n$$

La suite est décroissante et minorée par 0, elle converge vers $\ell \in [0,1]$.

(c) En posant $u_n = (n+1)e_n$, la relation de récurrence vue précédemment sur (e_n) va donner :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$$

suite récurrente double de premiers termes $u_0 = e_0 = 1$ et $u_1 = 2e_1$ inconnu ; on exprime alors u_n puis e_n en fonction de e_1. On résout pour ce faire

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

puis on a

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)1^n = \lambda + \mu n$$

puis le système $(u_0 = 1, u_1 = 2e_1)$ donne

$$u_n = 1 + (2e_1 - 1)\,n \quad \text{puis} \quad e_n = \frac{1}{n+1} + (2e_1 - 1)\frac{n}{n+1}$$

Enfin pour exprimer u_n en fonction de ℓ, on remarque qu'avec l'expression précédente on a immédiatement $\ell = 2e_1 - 1$, et on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_n = \frac{1}{n+1} + \ell\frac{n}{n+1}$$