Cours td sur la loi géométrique et sur la loi de Poisson
loi géométrique

modélisation

on procède à une succession d'expériences de type succès-echec jusqu'à obtenir un succès. Les expériences sont supposées indépendantes et de même probabilité de succès $p \in]0, 1[$. Ce qui nous intéresse ici est le temps d'attente du premier succès.

Par convention, on posera le temps d'attente de $(E, E, E, \dots, E)$ est égal ∞ .

Déterminons la loi de T :

Le support de T est

Car

Démontrer que

$$P(T = k) = (1 - p)^{k-1}p.$$

définition : loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ Soit $p \in]0, 1[$. une variable aléatoire X sur un univers de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suit une loi géométrique de paramètre p si et seulement si

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$

on note $\mathcal{G}(p)$ cette loi.

On dit qu'une variable aléatoire (ou qu'une loi d'une variable aléatoire) est sans mémoire, si on suppose que le moment du début d'observation n'a pas d'importance, c'est à dire

$$P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k)$$

(on trouve aussi la formulation $P_{(X > m)}(X = m + n) = P(X = n)$)

En utilisant l'égalité suivante :

$$P(X \geq n + 1) = P_{(X > n)}(X \geq n + 1) \times P(X > n)$$

valable pour toutes les lois et la propriété "sans mémoire". Montrer qu'alors la loi est une loi géométrique.

Loi de Poisson

présentation de la modélisation

On comptabilise le nombre de succès dans un intervalle de temps donné $[0, T]$. Pour cela, on découpe l'intervalle de temps en N intervalles de longueur $\delta t = T/N$

On fait les hypothèses suivantes :

- 1) La probabilité d'observer plus de 2 accidents dans un intervalle $[t, t + \delta t]$ est très faible par rapport à celle d'en observer 1. Ainsi, on observe au plus un succès par intervalle.
- 2) La probabilité qu'un succès se produise dans un intervalle de temps donné est indépendant du nombre d'accidents observés dans des intervalles disjoints.
- 3) la probabilité qu'un succès se produise dans un intervalle de temps $[t, t + \delta t]$ est proportionnelle à la durée : elle s'écrit $\mu \delta t$ (en supposant μ suffisamment petit pour que cette probabilité ne dépasse pas 1).

Soit X le nombre d'événements observés sur l'intervalle $[0, T]$. On réalise sur chacun des intervalles $[k\delta t; (k+1)\delta t]$ une expérience de type succès-échec avec probabilité de succès $\mu \delta t$.

- Donner la loi de X c'est à dire $P(X = n)$

dans toute la suite on note $\lambda = \mu T$

On va faire tendre δ vers 0 ou ce qui revient au même N vers $+\infty$

Montrer que

$$P(X = n) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{N} \right) \right) \frac{\lambda^n}{n!} \left(1 - \frac{\lambda}{N} \right)^{N-n}$$

- En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X = n) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Le calcul précédent motive, mais en aucun cas ne démontre la définition suivante :

Définition

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Une variable aléatoire X définie sur un univers probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suit une loi de Poisson de paramètre λ si (définition)

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$

- $\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

on notera dans ce cas $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

La variable aléatoire X admet une espérance et une variance égale à λ

Règle : on remplace la loi binomiale par la loi de Poisson si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) $p < 0,1$
- 2) $np > 10$
- 3) $n > 30$

**deuxième approche
théorème**

Soit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$. On suppose que p_n est une suite de réels dans $]0, 1[$ tels que $(np_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers une limite non nulle λ . Dans ce cas,

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Démonstration

somme de deux lois de Poisson indépendantes

deux calculs possibles qui apparaissent dans deux exos ccp

Enfin un exo de modélisation

Exercice 1. Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10 heures et 11 heures, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute est considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute n et la minute $n + 1$ est : $p = 0.1$. On veut calculer la probabilité pour que : 3,4,5,6,7,8... personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h.

1. Définir une variable aléatoire adaptée, puis répondre au problème considéré.
2. Quelle est la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h ?