dns

faire le premier exercice pour mardi 6 février

Exercice I

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[-1,1]$ et à valeurs réelles.

Q.1 Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant pour f et g éléments de E

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\ dt$$

Q.2 On note $u\ :\ t \mapsto 1$, $v\ :\ t \mapsto t$ et $F = \mathrm{Vect}(u, v)$. Déterminer une base orthonormée de F.

Q.3 Déterminer le projeté orthogonal de la fonction $w\ :\ t \mapsto e^t$ sur le sous-espace F et en déduire la valeur du réel

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left(e^t - (a+bt)\right)^2\ dt$$

On pourra simplifier les calculs en utilisant le théorème de Pythagore.

Problème

Objectifs

Notations

- Si f est une fonction réelle bornée sur $[a,b]$ avec $a < b$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

- On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On pourra confondre les expressions "polynômes" et "fonctions polynomiales".

1 Famille de polynômes orthogonaux

On munit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ défini par : pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$,

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt$$

On applique le procédé d'orthonomalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2, \dots)$ de $\mathbb{R}[X]$. On obtient donc une famille orthonormée de polynômes $(P_0, P_1, P_2, \dots)$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^k) = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k)$$

Le polynôme P_n s'appelle le polynôme de Legendre d'indice n.

Q.17. Calculer P_0 et P_1.

Q.18. Justifier que pour $n \geq 1$, le polynôme P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Démontrer que le polynôme P_n est de degré n.

On prend $n \geq 1$. On veut démontrer que P_n admet n racines simples dans $[-1,1]$.

Q.19. Justifier que $\int_{-1}^{1} P_n(t)\ dt = 0$ et en déduire que P_n admet au moins une racine dans $[-1,1]$.

On suppose par l'absurde que P_n admet strictement moins de n racine simples. Si P_n admet des racines $t_1, \dots, t_p$ de multiplicité impaire avec $p < n$, on pose $Q = (X - t_1)\dots(X - t_p)$; sinon, on pose $Q = 1$. On considère enfin le polynôme $H = QP_n$.

Q.20. Justifier que $\int_{-1}^{1} H(t)\ dt = 0$, puis conclure (on pourra remarquer que H est de signe constant sur $[-1,1]$).

2 Méthodes de quadrature

Dans cette partie, nous allons voir comment les polynôme interpolateurs de Lagrange peuvent être utilisés pour estimer $\int_a^b f(x)\,dx$ pour $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.
Pour cela, on choisit d'abord une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ de l'intervalle $[a,b]$. A cause du phénomène de Runge, si N est grand, le polynôme interpolateur de f aux points x_i n'est pas forcément une bonne approximation de f. Approximer $\int_a^b f(t)\,dt$ par $\int_a^b L_N(f)(x)\,dx$ n'est donc pas forcément pertinent...
Nous allons en fait approximer f par un polynôme d'interpolation sur chaque petit intervalle $[x_k, x_{k+1}]$.
D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$$

Q.21. Justifier que

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \quad \text{avec} \quad g(t) = f\left(x_k + (t+1)\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)$$

On est donc ramenés à estimer $\int_{-1}^1 g(t)\,dt$ où $g\ :\ [-1,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
On se donne $n+1$ points $t_0, t_1, \ldots, t_n$ dans $[-1,1]$, deux à deux distincts.
On rappelle que $L_n(g) = \sum_{i=0}^n g(t_i) l_i(X)$ est le polynôme interpolateur de g aux points t_i et on pose

$$J(g) = \int_{-1}^1 L_n(g)(t)\,dt = \sum_{i=0}^n \alpha_i g(t_i) \quad \text{avec} \quad \alpha_i = \int_{-1}^1 l_i(t)\,dt$$

Lorsqu'on approxime $\int_{-1}^1 g(t)\,dt$ par $J(g)$, c'est-à-dire :

$$\int_{-1}^1 g(t)\,dt \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i g(t_i)$$

on dit que J est une méthode de quadrature associée aux points $t_0, \ldots, t_n$ et aux poids $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$.

Q.22. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $J(P) = \int_{-1}^1 P(t)\,dt$.

On dit que la méthode de quadrature J est d'ordre au moins n car la formule approchée est exacte pour les polynômes de dégré inférieur ou égal à n.

Q.23. Exemple : on prend $n = 1$, $t_0 = -1$ et $t_1 = 1$. Déterminer α_0 et α_1. Expliquer à l'aide d'un graphique en prenant g positive pourquoi, dans ce cas, la méthode J s'appelle la “méthode des trapèzes”.

Quadrature de Gauss

Dans les deux questions suivantes, on prend pour points d'interpolation $t_0, t_1, \ldots, t_n$ les $(n+1)$ racines du polynôme de Legendre P_{n+1} introduit dans la partie 3.
Nous allons démontrer que, dans ce cas, la formule de quadrature J est d'ordre au moins $2n+1$.
Soit $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. On fait la division euclidienne de P par P_{n+1}, on note respectivement Q le quotient et R le reste de cette division :

$$P = QP_{n+1} + R$$

Q.24. Démontrer que $J(QP_{n+1}) = \int_{-1}^1 Q(t)P_{n+1}(t)\,dt$, puis conclure que $J(P) = \int_{-1}^1 P(t)\,dt$.

Q.25. Démontrer que les poids $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ associés à la quadrature de Gauss sont strictement positifs et calculer leur somme.