

1 pour mardi

On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

1°) Soit f un endomorphisme de E .

a) Exprimer le réel $\sum_{k=1}^n \|f(e_k)\|^2$ à l'aide de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

b) En déduire que le réel $\sum_{k=1}^n \|f(e_k)\|^2$ est indépendant du choix de la base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E .

On notera alors

$$T(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \|f(e_k)\|^2$$

2°) Soit f un endomorphisme de E .

a) Montrer que si f possède une valeur propre réelle λ , alors $T(f) \geq \lambda^2$.

b) En déduire que si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E et que si $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille de vecteurs de E vérifiant $\sum_{k=1}^n \|e_k - u_k\|^2 < 1$, alors cette famille est une base de E .

2 Pour mercredi

Soit un entier naturel $n \geq 2$. On se place dans $\mathbb{R}^n$ que l'on munit de son produit scalaire canonique. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Lorsque F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\delta(F) = \max_{i \in [1, n]} d(e_i, F)$$

1°) Montrer que l'ensemble

$$G = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Calculer $\dim(G)$ et $\delta(G)$.

2°) On suppose dans cette question que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k .

a) Montrer que

$$\sum_{i=1}^n d(e_i, F)^2 = n - k.$$

b) Montrer que l'on a $\delta(F) = \sqrt{\frac{n-k}{n}}$ si et seulement si tous les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ sont équidistants de F .

c) On définit sur $\mathbb{R}^n$ l'application φ par

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

On suppose que F est stable par φ . Montrer que $\delta(F) = \sqrt{\frac{n-k}{n}}$.

3 Pour jeudi

1. Soit A une matrice carrée réelle de format n et $S = {}^tAA$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

2. Réciproquement, montrer que pour toute matrice S symétrique positive, il existe une matrice A carrée réelle de format n telle que $S = {}^tAA$. A-t-on l'unicité de A ?

3. Montrer que S est définie positive si et seulement si A est inversible.

4. Montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}(S)$.

5. (Racine carrée d'une matrice symétrique positive) Soit S une matrice symétrique positive.

Montrer qu'il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.

4 Pour Vendredi

endomorphismes qui commutent avec leur adjoint Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u^* = u^* \circ u$. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et E_λ le sous-espace propre associé.

1a) Rappeler pourquoi E_λ est stable par u^* .

1b) On note v et w les restrictions de u et v à F_λ . Montrer que :

$$\forall x \in F_\lambda, \forall y \in F_\lambda, (\lambda Id|_F(x), y) = (x, w(y)).$$

En déduire, à l'aide de la caractérisation de l'adjoint que $w^* = \lambda Id_F$ donc que

$$E_\lambda(u) \subset E_\lambda(u^*).$$

1c) Conclure que u et u^* ont les mêmes sous-espaces propres.

2) Montrer que les sous-espaces propres de u sont orthogonaux.

5 Pour Samedi

exo 1 Existence et unicité d'une racine carrée

Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$

1) Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{S}^+(E)$, tel que $v^2 = u$.

2) Etablir l'unicité d'un tel que v . On pourra, après avoir justifié son existence, considérer les restrictions de v à chaque sous-espace propre de u .

exo2 Une inégalité

Soit $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$. Montrer que pour tout $x \in E$:

$$||x||^4 \leq (u(x), x) (u^{-1}(x), x).$$

On pourra considérer pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$;

$$(u(x + \lambda u^{-1}(x)), x + \lambda u^{-1}(x)).$$

6 Pour Dimanche

endomorphismes antisymétriques bijectifs Soit f un endomorphisme de E tel que $f^* = -f$.

1) Ecrire l'égalité vérifiée pour tout $x \in E$ $y \in E$ que l'on déduit de $f^* = -f$.

2) Montrer que pour tout $x \in E$, x et $f(x)$ sont orthogonaux. En déduire les valeurs propres réelles possibles de f .

3) Montrer que $s = f \circ f$ est symétrique.

4) On suppose maintenant que f est bijective.

Soit λ une valeur propre de s et x un vecteur propre associé. Montrer que

$$(s(x) | x) = \lambda ||x||^2 = -||f(x)||^2.$$

En déduire que $\lambda < 0$.

5) On considère toujours x vecteur propre de s pour λ .

Montrer que les espaces $F = \text{Vect}(x, f(x))$ et $F^\perp$ sont stables par f et que l'endomorphisme induit par f sur F a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ où } b > 0.$$

dans une base orthonormale bien choisie. On précisera la valeur de b en fonction de λ .

6) Conclure que la dimension de E est paire.