ALG-EB-4. — On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

1°) Soit f un endomorphisme de E.

a) Exprimer le réel $\sum_{k=1}^{n} \|f(e_k)\|^2$ à l'aide de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

b) En déduire que le réel $\sum_{k=1}^{n} \|f(e_k)\|^2$ est indépendant du choix de la base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E.

On notera alors

$$\mathrm{T}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \|f(e_k)\|^2.$$

2°) Soit f un endomorphisme de E.

a) Montrer que si f possède une valeur propre réelle λ, alors $\mathrm{T}(f) \geqslant \lambda^2$.

b) En déduire que si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E et que si $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille de vecteurs de E vérifiant $\sum_{k=1}^{n} \|e_k - u_k\|^2 < 1$, alors cette famille est une base de E.

1°a) Notons $\mathrm{A} = \left[a_{i,j}\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de A dans la base $\mathscr{B}$. Comme $f(e_k) = a_{1,k}e_1 + \cdots + a_{n,k}e_n$, les règles de calcul dans une base orthonormée donnent

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \|f(e_k)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}^2$$

si bien que

$$\sum_{k=1}^{n} \|f(e_k)\|^2 = \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A}).$$

1°b) Désignons par $\mathscr{F}$ une autre base orthonormée de E et par B la matrice de f dans cette base. Nous savons qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $\mathrm{B} = \mathrm{P}^\mathrm{T}\mathrm{A}\mathrm{P}$. On a alors

$$\mathrm{tr}(\mathrm{B}^\mathrm{T}\mathrm{B}) = \mathrm{tr}(\mathrm{P}^\mathrm{T}\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{P}\mathrm{P}^\mathrm{T}\mathrm{A}\mathrm{P}) = \mathrm{tr}(\mathrm{P}^\mathrm{T}\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A}\mathrm{P}) = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A})$$

puisque $\mathrm{tr}(\mathrm{UV}) = \mathrm{tr}(\mathrm{VU})$ pour toutes matrices U et V de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\sum_{k=1}^{n} \|f(e_k)\|^2$ ne dépend pas de la base orthormée de E choisie.

2°a) Soit e_1 un vecteur propre normé associé à la valeur propre λ. Grâce au théorème de la base incomplète orthonormée, on peut construire à l'aide de e_1 une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E. On obtient alors que

$$\mathrm{T}(f) = \sum_{k=1}^{n} \|f(e_k)\|^2 \geqslant \|f(e_1)\|^2 = \lambda^2$$

2°*b*) Soit φ l'unique endomorphisme de E vérifiant

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathrm{E} &\longrightarrow \mathrm{E} \\ e_1 &\longmapsto u_1 \\ &\vdots \\ e_n &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E si et seulement si φ est bijective. Il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathrm{E}}\}$ en vertu du théorème de caractérisation des automorphismes en dimension finie. Or, étant donné que

$$\sum_{k=1}^{n} \|e_k - u_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \varphi)(e_k)\|^2 < 1,$$

le réel 1 n'est pas valeur propre de $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \varphi$. On en déduit que 0 n'est pas valeur propre de φ si bien que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathrm{E}}\}$. Le résultat en découle.

Remarque. — On peut demander aussi — s'il reste du temps — ce que vaut $\mathrm{T}(f)$ lorsque f est un projecteur orthogonal de E. On obtient alors le rang de f en se plaçant dans une base orthonormée adaptée à $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(f) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(f)$.