ALG-EB-1. — Soit un entier naturel $n \geq 2$. On se place dans $\mathbb{R}^n$ que l'on munit de son produit scalaire canonique. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Lorsque F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\delta(F) = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} d(e_i, F).$$

1°) Montrer que l'ensemble

$$G = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Calculer $\dim(G)$ et $\delta(G)$.

2°) On suppose dans cette question que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k .

a) Montrer que

$$\sum_{i=1}^n d(e_i, F)^2 = n - k.$$

b) Montrer que l'on a $\delta(F) = \sqrt{\frac{n-k}{n}}$ si et seulement si tous les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ sont équidistants de F .

c) On définit sur $\mathbb{R}^n$ l'application φ par

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

On suppose que F est stable par φ . Montrer que $\delta(F) = \sqrt{\frac{n-k}{n}}$.

1°) Notons v le vecteur $e_1 + \dots + e_n$. On note que $G = \{v\}^\perp$. Ainsi, l'ensemble G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, c'est plus précisément un hyperplan de $\mathbb{R}^n$; il est donc de dimension $n-1$. On note aussi que $G^\perp = \text{Vect}(v)$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Le théorème de projection assure que

$$d(e_i, G) = \|p_{G^\perp}(e_i)\| = \left\| \left\langle e_i, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{|\langle e_i, v \rangle|}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On obtient directement que $d(e_i, G) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi, on a $\delta(G) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2°a) Le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est de dimension $n-k$. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-k})$ une base orthonormée de $F^\perp$. En exprimant $p_{F^\perp}(e_i)$ dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-k})$, on obtient

$$p_{F^\perp}(e_i) = \sum_{j=1}^{n-k} \langle e_i, \varepsilon_j \rangle \varepsilon_j.$$

On pourra inciter le candidat à exprimer $p_{F^\perp}(e_i)$ dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-k})$. Les règles de calcul dans une base orthonormée assurent alors que

$$d(e_i, F)^2 = \|p_{F^\perp}(e_i)\|^2 = \sum_{j=1}^{n-k} \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2.$$

On en déduit que

$$\sum_{i=1}^n d(e_i, F)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-k} \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2$$

puis, en permutant ces deux sommes sur des secteurs rectangulaires, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d(e_i, F)^2 &= \sum_{j=1}^{n-k} \sum_{i=1}^n \langle e_i, \varepsilon_j \rangle^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n-k} \|\varepsilon_j\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n-k} 1 \\ \sum_{i=1}^n d(e_i, F)^2 &= n - k. \end{aligned}$$

2°b) Supposons que $d(e_1, F) = \dots = d(e_n, F)$. On déduit de la question précédente que

$$n - k = \sum_{i=1}^n d(e_i, F)^2 = \sum_{i=1}^n \delta(F)^2 = n \delta(F)^2$$

si bien que $\delta(F)^2 = \frac{n-k}{n}$ puis $\delta(F) = \sqrt{\frac{n-k}{n}}$

Réciproquement, supposons que $\delta(F) = \sqrt{\frac{n-k}{n}}$, toujours d'après la question précédente, on a

$$n - k = \sum_{i=1}^n d(e_i, F)^2 \leq \sum_{i=1}^n \delta(F)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{n-k}{n} = n - k$$

On en déduit que les inégalités utilisées sont des égalités si bien que $d(e_i, F)^2 = \delta(F)^2$ puis $d(e_i, F) = \delta(F)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

2°c) Montrons que les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ sont équidistants de F . L'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$; c'est même un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. On en déduit notamment que comme F est stable par φ , il en va de même de $F^\perp$ (cette propriété n'est pas explicitement au programme en P.S.I., on peut demander à l'étudiant de la démontrer). Pour des raisons de dimension, comme φ est bijective, on a même $\varphi(F) = F$ et $\varphi(F^\perp) = F^\perp$. On se donne une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-k})$ de $F^\perp$. Les points précédents permettent d'affirmer que $(\varphi^i(\varepsilon_1), \dots, \varphi^i(\varepsilon_{n-k}))$ est une base orthonormée de $F^\perp$. Comme φ conserve le produit scalaire

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad d(e_1, F)^2 = \sum_{j=1}^{n-k} \langle e_1, \varepsilon_j \rangle^2 = \sum_{j=1}^{n-k} \langle \varphi^i(e_1), \varphi^i(\varepsilon_j) \rangle^2 = \sum_{j=1}^{n-k} \langle e_i, \varphi^i(\varepsilon_j) \rangle^2 = d(e_i, F)^2.$$

Il en découle que $d(e_1, F) = d(e_i, F)$ pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. On déduit alors de la question précédent que $\delta(F) = \sqrt{\frac{n-k}{n}}$.