

1 Etude d'un endomorphisme

I.1.1 Φ est linéaire par linéarité de la dérivation et distributivité de la multiplication sur l'addition.

D'après les propriétés du degré

$$d^o(\Phi(P)) \leq \max(d^o(AP''), d^o(BP')) \leq n.$$

Φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

I.1.2 L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique, linéaire par rapport à la seconde variable. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 P(t)^2 dt \geq 0$. Si cette quantité est nulle alors P^2 est nul sur $[-1, 1]$ (positif, continu, d'intégrale nulle) et donc $P = 0$ (polynôme avec une infinité de racines). On a donc bien un produit scalaire.

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$;

$$\langle XP, Q \rangle = \int_{-1}^1 tP(t)Q(t) dt = \langle P, XQ \rangle$$

I.2.1 Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$; comme $B = A'$, on a

$$\langle \Phi(P), Q \rangle - \langle P, \Phi(Q) \rangle = \int_{-1}^1 ((P''Q - PQ'')A + (P'Q - PQ')A')$$

En posant $U = P''Q - PQ''$ et $V = (P'Q - PQ')$ qui sont des polynômes, on a

$$\langle \Phi(P), Q \rangle - \langle P, \Phi(Q) \rangle = \int_{-1}^1 (UA + VA')$$

On remarque que $(P''Q - PQ'')A + (P'Q - PQ')A'$ est la dérivée de $(P'Q - PQ')A$ et on a donc

$$\langle \Phi(P), Q \rangle - \langle P, \Phi(Q) \rangle = [(P'Q - PQ')A]_{-1}^1 = 0$$

On a montré que

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \langle \Phi_n(P), Q \rangle = \langle P, \Phi_n(Q) \rangle$$

ce qui signifie que Φ_n est auto-adjoint.

I.2.2 On calcule

$$\forall k \in \mathbb{N}, \Phi(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$$

donc

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & n(n+1) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

C'est une matrice triangulaire et ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux. On a ainsi

$$\text{Sp}(\Phi(n)) = \{k(k+1) / 0 \leq k \leq n\}$$

I.2.3 Les valeurs propres de Φ_n sont deux à deux distinctes ($x \mapsto x(x+1)$ est injective sur $\mathbb{R}^+$) et en nombre $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, ils sont donc forcément tous de dimension 1.

Montrons par récurrence le résultat. Pour $n=1$ la matrice est $M_1 = 0$, il y a un sous espace propre $\text{Vect}(1)$, donc $P_0 = 1$ convient. Supposons que M_n possède une base de vecteurs propres $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ unitaires tel que $d^0(p_i) = i$ pour tout $i \leq n$.

Ces vecteurs propres sont aussi des vecteurs propres de Φ_{n+1} (Car $\Phi_{n+1}(P_i) = \Phi_n(P_i)$). Et Φ_{n+1} est diagonalisable et possède une valeur propre de plus et un vecteur propre n'appartenant pas à $\mathbb{R}_n[X]$ (Car la somme directe des sous-espaces propres est égale à $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ donc un vecteur propre de degré $n+1$).

Un multiple d'un vecteur propre étant encore propre, on peut se ramener au cas d'un polynôme unitaire. Il existe finalement

une base de vecteurs propres pour Φ_n échelonnée en degré et formée de polynômes unitaires.

- I.2.4** Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont orthogonaux (mais pas toujours les vecteurs propres dans le cas d'un sous espace propre de dimension 2 par exemple)
On a vu que $E_{\lambda_k} = \text{Vect}(P_k)$ (tous les sous-espaces propres sont de dimension 1) on a

$$\forall i \neq k, \langle P_i, P_k \rangle = 0$$

En particulier P_k est dans l'orthogonal de $\text{Vect}(P_0, \dots, P_{k-1})$. Cette famille est constitué de k polynômes indépendants (orthogonaux et non nuls) de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Elle engendre ainsi un sous-espace de dimension k de $\mathbb{R}_k[X]$ qui, par dimension, est égal à $\mathbb{R}_k[X]$:

$$\forall k, P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]^\perp$$

- I.2.5** L'énoncé initial demandait les 4 premiers (et ils sont uniques ce qui n'a jamais été demandé

. On détermine avec la calculatrice les vecteurs propres de $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ et on en déduit (après normalisation) que

$$P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2 - \frac{1}{3} = (X - \frac{1}{\sqrt{3}})(X + \frac{1}{\sqrt{3}}), P_3 = X(X^2 - \frac{3}{5}) = X(X - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})(X + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})$$

2 Etude des racines de ces polynômes

- II.1** P_n et XP_{n-1} étant unitaires de degré n , $P_n - XP_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, mais P_{n-1} est unitaire de degré $n-1$, une combinaison linéaire permet de supprimer le terme de degré $n-1$.

$$P_n - XP_{n-1} + \lambda_n P_{n-1} = S_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$$

- II.2** Soit $k \leq n-3$. $\langle XP_{n-1}, P_k \rangle = \langle P_{n-1}, XP_k \rangle = 0$ car $XP_k \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et est donc orthogonal à P_{n-1} . On a ainsi (on sait aussi que P_{n-1} et P_k sont orthogonaux)

$$\langle S_n, P_k \rangle = \langle P_n, P_k \rangle - \langle XP_{n-1}, P_k \rangle + \lambda_n \langle P_{n-1}, P_k \rangle = \langle P_n, P_k \rangle$$

et P_n et P_k sont orthogonaux. Donc

$$\langle S_n, P_k \rangle = 0.$$

- II.3** S_n et P_{n-2} sont tous deux dans $\mathbb{R}_{n-2}[X] \cap \mathbb{R}_{n-3}[X]^\perp$ et cet espace est de dimension 1 (l'orthogonal d'un espace de dimension $n-2$ dans un espace de dimension $n-1$ est de dimension 1). Ces deux polynômes sont donc colinéaires et comme $P_{n-2} \neq 0$, il existe μ_{n-2} tel que $S_n - \mu_{n-2}P_{n-2} = 0$. On a alors

$$P_n = (X - \lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}$$

Reste à démontrer que $\mu_n > 0$. Prenons le produit scalaire de cette expression avec P_{n-2} . On obtient

$$\mu_n \|P_{n-2}\|^2 = \langle XP_{n-1}, P_{n-2} \rangle = \langle P_{n-1}, XP_{n-2} \rangle$$

$XP_{n-2} - P_{n-1}$ est de degré $\leq n-2$ et donc orthogonal à P_{n-1} . On a donc aussi

$$\mu_n \|P_{n-2}\|^2 = \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle > 0$$

et comme $\|P_{n-2}\|^2 > 0$, on conclut que

$$\mu_n > 0$$

II.4 Si $k \geq 1$ alors P_k est orthogonal à $P_0 = 1$ et donc

$$\int_{-1}^1 P_k(t) dt = \langle P_k, P_0 \rangle = 0$$

Si, par l'absurde, P_k n'admettait que des racines d'ordre impair dans $] -1, 1[$, il serait de signe constant sur $] -1, 1[$ (les racines avec changement de signe sont celles d'ordre impair) et donc aussi (continuité) sur $[-1, 1]$. Etant continu et d'intégrale nulle sur $[-1, 1]$, il serait nul sur $[-1, 1]$ et donc nul (polynôme avec une infinité de racines).

P_k a donc au moins une racine d'ordre impair dans $] -1, 1[$.

II.5 Supposons, par l'absurde $k < n$. On a alors $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui est orthogonal à P_n et donc $\int_{-1}^1 PQ_n = 0$. Or, par définition de Q_n , PQ_n n'a que des racines d'ordre pair dans $] -1, 1[$ et est donc de signe constant sur $[-1, 1]$. On aboutit à une contradiction comme en question précédente. (et comme dans le devoir à la maison mais il faudrait chercher les devoirs à la maison)

On a donc au moins n racines d'ordre impair dans $] -1, 1[$ pour P_n . Mais P_n admettant au plus n racines comptées avec leurs multiplicités, les ordres valent nécessairement 1 et il n'y a pas d'autres racines. Finalement, P_n est scindé à racines simples et ses racines sont toutes dans $] -1, 1[$.

3 Etude d'une matrice

III.1.1 On a directement

$$Q_1(X) = X \text{ et } Q_2(X) = X(X - \lambda_2) - \mu_2 = (X - \lambda_2)Q_1(X) - \mu_2Q_0(X)$$

Pour calculer $Q_3(X)$, on développe par rapport à la dernière colonne :

$$Q_3(X) = (X - \lambda_3)Q_2(X) + \sqrt{\mu_3}(-\sqrt{\mu_3}X) = (X - \lambda_3)Q_2(X) - \mu_3Q_1(X)$$

III.1.2 On procède de même en développant par rapport à la dernière colonne dans $Q_n(X)$:

$$Q_n(X) = (X - \lambda_n)Q_{n-1}(X) + \sqrt{\mu_n}\Delta_{n-1}(X)$$

où $\Delta_{n-1}(X)$ est un déterminant de taille $n-1$ que l'on développe par rapport à sa dernière ligne pour obtenir

$$Q_n(X) = (X - \lambda_n)Q_{n-1}(X) - \mu_nQ_{n-2}(X)$$

III.1.3 On a $Q_0 = P_0$, $P_1 = Q_1$ et (P_k) et (Q_k) qui vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2. Une récurrence donne alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, Q_k(X) = P_k(X)$$

Or, M_n est symétrique réelle et donc diagonalisable. Son polynôme caractéristique $(-1)^n Q_n(X)$ est alors scindé sur $\mathbb{R}$. $Q_n = P_n$ est donc scindé sur $\mathbb{R}$ (toutes ses racines sont réelles).

III.2.1 On peut démontrer d'abord l'existence d'un maximum : l'application $(x, y) \mapsto \langle u(x), y \rangle$ est bilinéaire en dimension finie donc continue. Elle est bornée et atteint ses bornes sur le compact qu'est la sphère en dimension finie. Pour le calcul du maximum, on refait le calcul classique :

Soit $x \in F_i$. On peut l'écrire $x = \sum_{k=1}^i x_k e_k$ et on a (la famille des e_k étant orthonormée)

$$(u(x)|x) = \sum_{k=1}^i \alpha_k x_k^2 \leq \alpha_i \sum_{k=1}^i x_k^2 = \alpha_i \|x\|^2$$

avec égalité pour $x = e_i$ par exemple. On a ainsi

$$\max_{x \in F_i, \|x\|=1} (u(x)|x) = \alpha_i$$

III.2.2 Soit $x \in G_i$. On peut l'écrire $x = \sum_{k=i}^n x_k e_k$ et on a (la famille des e_k étant orthonormée)

$$(u(x)|x) = \sum_{k=i}^n \alpha_k x_k^2 \geq \alpha_i \sum_{k=i}^n x_k^2 = \alpha_i \|x\|^2$$

avec égalité pour $x = e_i$ par exemple. On a ainsi

$$\min_{x \in G_i, \|x\|=1} (u(x)|x) = \alpha_i$$

III.3 Soit F de dimension i . Par formule de Grassman,

$$\dim(F \cap G_i) = \dim(F) + \dim(G_i) - \dim(F + G_i) = n + 1 - \dim(F + G_i) \geq 1$$

et $F \cap G_i \neq \{0\}$. D'après la question précédente $(u(x)|x) \geq \alpha_i$ pour x unitaire dans G et donc a fortiori dans $G \cap F_i$. Comme il existe un tel x (puisque $F \cap G_i$ contient une droite) on a

$$\max_{x \in F, \|x\|=1} (u(x)|x) \geq \alpha_i$$

et comme ceci est vrai pour tout sous-espace F de dimension i (la borne inférieure est le plus grand des minorants et α_i est un minorant)

$$\alpha_i \leq \inf_{\substack{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ \dim(F)=i}} \left\{ \max_{x \in F, \|x\|=1} (u(x)|x) \right\}$$

Pour $F = F_i$, on a vu que le minorant trouvé est atteint. C'est donc en fait la borne inférieure et, mieux, le minimum :

$$\alpha_i = \min_{\substack{F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ \dim(F)=i}} \left\{ \max_{x \in F, \|x\|=1} (u(x)|x) \right\}$$

III.4.1 On note u_k l'endomorphisme de $\mathbb{R}^k$ canoniquement associé à u_k . Si $y \in \mathbb{R}^k$, on note Y la matrice colonne associée (coordonnées dans la base canonique).

Soit F' un sous-espace de $\mathbb{R}^{n-1}$ de dimension $n-i$. On note $F = \{x = (x'_1, \dots, x'_{n-1}, 0) / (x'_1, \dots, x'_{n-1}) \in F'\}$. F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ isomorphe à F' et donc de dimension $n-i$. Si $x' \in F'$, on note $x \in F$ l'élément associé. Un calcul par blocs montre que

$$\forall x' \in F', (u_{k-1}(x')|x') = {}^t X' M_{n-1} X' = {}^t X M_n X = (u_n(x)|x)$$

et donc ($\|x\| = 1$ ssi $\|x'\| = 1$)

$$\min_{x' \in F', \|x'\|=1} (u_{k-1}(x')|x') = \min_{x \in F, \|x\|=1} (u_{k-1}(x)|x)$$

Avec le résultat admis, le membre de droite est inférieur à α_{i+1} et donc

$$\min_{x' \in F', \|x'\|=1} (u_{k-1}(x')|x') \leq \alpha_{i+1}$$

Ceci étant vrai pour tout sous-espace de dimension i de $\mathbb{R}^{n-1}$, la question **III.3** (utilisée avec u_{n-1}) donne alors

$$\beta_i \leq \alpha_{i+1}$$

Soit maintenant F' de dimension i . Avec les mêmes notations,

$$\max_{x' \in F', \|x'\|=1} (u_{k-1}(x')|x') = \max_{x \in F, \|x\|=1} (u_{k-1}(x)|x) \geq \alpha_i$$

et donc

$$\beta_i \geq \alpha_i$$

III.4.2 Il suffit d'utiliser la question précédente avec $i = 1, \dots, n-1$ pour obtenir

$$\alpha_1 \leq \beta_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{n-1} \leq \beta_{n-1} \leq \alpha_n$$

III.4.3 Les β_i sont les racines de $Q_{n-1} = P_{n-1}$ et les α_i celles de $Q_n = P_n$. La question précédente permet immédiatement de conclure.