Des classiques

Partie III : PROBLEME

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur à 1. On désigne par $\mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ dans cet ordre. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note M^T sa transposée.

On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle\ |\ \rangle$ et de la norme euclidienne $\|\ \|$ associée. On note $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace des endomorphismes symétriques de E, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes s de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \ \langle s(x)|y\rangle = \langle x|s(y)\rangle.$$

Un endomorphisme symétrique s de E est dit symétrique positif (respectivement symétrique défini positif) si :

$$\forall x \in E, \ \ \langle s(x)|x\rangle \geqslant 0 \ \ (\text{respectivement } \forall x \in E \setminus \{0\}, \ \ \langle s(x)|x\rangle > 0).$$

Une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (respectivement symétrique définie positive) si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ \ X^T S X \geqslant 0 \ \ (\text{respectivement } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \ \ X^T S X > 0).$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement symétriques définies positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle qu'un endomorphisme s de E est symétrique (respectivement symétrique positif, symétrique défini positif) si, et seulement si, sa matrice dans toute base orthonormée de E est symétrique (respectivement symétrique positive, symétrique définie positive).

On admet que, pour tous réels positifs $a_1, \cdots, a_n$,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \text{ (inégalité arithmético-géométrique).}$$

Objectif du problème

On se donne une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) et on étudie le maximum (ou minimum) de la forme linéaire $A \mapsto \mathrm{Tr}(AS)$ sur des ensembles de matrices.

Questions préliminaires

III.1.

III.1.a Enoncer (sans démonstration) le théorème de réduction des endomorphismes symétriques de l'espace euclidien E et sa version relative aux matrices symétriques réelles.

III.1.b Toute matrice symétrique à coefficients complexes est-elle nécessairement diagonalisable ? On pourra par exemple considérer la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

III.2. Soit $s \in \mathcal{S}(E)$, de valeurs propres (réelles) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

Soit $\beta = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, ε_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i. Pour tout vecteur x de E, on pose :

$$R_x(x) = \langle s(x)|x\rangle.$$

III.2.a Exprimer $R_s(x)$ à l'aide des λ_i et des coordonnées de x dans la base β.

III.2.b En déduire l'inclusion : $R_s(S(0,1)) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$ où $S(0,1)$ désigne la sphère unité de E.

III.3.

III.3.a On suppose dans cette question que s est symétrique positif (respectivement symétrique défini positif). Démontrer que les valeurs propres de s sont toutes positives (respectivement strictement positives).

III.3.b Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

On note s l'endomorphisme de E représenté par S dans la base canonique $B = (e_1, \cdots, e_n)$. Exprimer le terme général $s_{i,j}$ de S comme un produit scalaire et démontrer que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} \;\; \lambda_1 \leqslant s_{i,i} \leqslant \lambda_n.$$

Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.4. Démontrer que l'application $M \mapsto M^T M - I_n$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.5. Justifier que, si $A = (a_{i,j})$ est une matrice orthogonale, alors :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2 \;\; |a_{i,j}| \leqslant 1.$$

III.6. En déduire que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.7. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (positives) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On pose $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Si A est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $T(A) = \operatorname{Tr}(AS)$.

III.7.a Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que :

$$T(A) = \operatorname{Tr}(B\Delta).$$

III.7.b Démontrer que l'application T de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ que l'on notera t.

III.7.c Démontrer que, pour toute matrice orthogonale A de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leqslant \operatorname{Tr}(S)$, puis déterminer le réel t.

Inégalité d'Hadamard

Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (réelles positives) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

III.8. Démontrer l'inégalité valable pour tout $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$:

$$\det(S) \leqslant \left(\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(S)\right)^n \quad (*).$$

III.9. Soit $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et $S_\alpha = D^T S D$. Démontrer que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et calculer $\operatorname{Tr}(S_\alpha)$.

III.10. Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux $s_{i,i}$ de S sont strictement positifs et, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $\alpha_i = \dfrac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$. En utilisant l'inégalité $(*)$, démontrer que :

$$\det(S) \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.$$

III.11. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on pose $S_\varepsilon = S + \varepsilon I_n$. Démontrer que $\det(S_\varepsilon) \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(s_{i,i} + \varepsilon)$, puis conclure que :

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{i,i} \ \text{(inégalité d'Hadamard).}$$

Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$, et $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = \Omega \Delta \Omega^T$. On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

III.12. Démontrer que, pour tout $A \in \mathcal{U}$, la matrice $B = \Omega^T A \Omega$ est une matrice de $\mathcal{U}$ vérifiant :

$$\operatorname{Tr}(AS) = \operatorname{Tr}(B\Delta).$$

III.13. Démontrer que $\{\operatorname{Tr}(AS) \setminus A \in \mathcal{U}\} = \{\operatorname{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$, puis que ces ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera m.

III.14. Démontrer que, si $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$:

$$\operatorname{Tr}(B\Delta) \geqslant n(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n}(b_{1,1} \cdots b_{n,n})^{1/n}.$$

III.15. En déduire que, pour $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$, $\operatorname{Tr}(B\Delta) \geqslant n(\det(S))^{1/n}$.

III.16. Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda_k}(\det(S))^{1/n}$ et $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$. Déterminer le réel m.

Fin de l'énoncé

Exercice 1 (déjà vu)**.** On rappelle que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques telles que toutes les valeurs propres sont positives. Ce qui est équivalent à $\forall X \quad {}^tXAX \geqslant 0$.

1. Soit A une matrice carrée réelle de format n et $S = {}^tAA$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Réciproquement, montrer que pour toute matrice S symétrique positive, il existe une matrice A carrée réelle de format n telle que $S = {}^tAA$. A-t-on l'unicité de A ?

   On rappelle que S est symétrique définie positive, ou encore
   $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.
3. Montrer que S est définie positive si et seulement si A est inversible.
4. Montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(S)$.
5. (Racine carrée d'une matrice symétrique positive) Soit S une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.

devoir non surveillé :encore une décomposition

Exercice 2. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $(A \mid B) = tr({}^tAB))$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est à dire telle que $tA = -A$ et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AU) \leqslant \mathrm{tr}A$.
a) Déterminer le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
b) Soit $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(xB) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
c) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
d) Etudier la réciproque.
e) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = SU$.

Exercice 3 (Matrices et déterminants de Gram)**.** Soit E un espace préhilbertien réel.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, ..., x_n)$ dans E^n, on pose $G(x_1, ..., x_n) = (x_i|x_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (matrice de Gram) puis $\gamma(x_1, ..., x_n) = \det(G(x_1, ..., x_n))$ (déterminant de Gram).

1. Montrer que $\mathrm{rg}(G(x_1, ..., x_n)) = \mathrm{rg}(x_1, ..., x_n)$.
2. Montrer que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1, ..., x_n) = 0$ et que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1, ..., x_n) > 0$.
3. On suppose que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre dans E. On pose $F = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n)$. Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d(x, F)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|^2$). Montrer que $d(x, F) = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, ..., x_n)}{\gamma(x_1, ..., x_n)}}$.