1 Pour mardi

exo1 Soit $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ Montrer que A et B sont orthogonalement semblables deux matrices ssi $\chi_A = \chi_B$.

exo2

endomorphismes qui commutent avec leur adjoint Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u^* = u^* \circ u$. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et E_λ le sous-espace propre associé.

1a) Rappeler pourquoi E_λ est stable par u^* .

1b) On note v et w les restrictions de u et u^* à E_λ . Montrer que :

$$\forall x \in E_\lambda, \forall y \in E_\lambda, (\lambda Id_{|E_\lambda}(x), y) = (x, w(y)).$$

En déduire, à l'aide de la caractérisation de l'adjoint que $w^* = \lambda Id_{E_\lambda}$ donc que

$$E_\lambda(u) \subset E_\lambda(u^*).$$

1c) Conclure que u et u^* ont les mêmes sous-espaces propres.

2) Montrer que les sous-espaces propres de u sont orthogonaux.

2 Pour mercredi

exo 1 Existence et unicité d'une racine carrée

Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$

1) Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{S}^+(E)$, tel que $v^2 = u$.

2) Etablir l'unicité d'un tel que v . On pourra, après avoir justifié son existence, considérer les restrictions de v à chaque sous-espace propre de u .

exo2 Une inégalité

Soit $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$. Montrer que pour tout $x \in E$:

$$\|x\|^4 \leq \langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle.$$

On pourra considérer pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$;

$$\langle (u(x) + \lambda u^{-1}(x)), x + \lambda u^{-1}(x) \rangle.$$

3 Pour jeudi

endomorphismes antisymétriques bijectifs Soit f un endomorphisme de E tel que $f^* = -f$.

1) Ecrire l'égalité vérifiée pour tout $x \in E$ $y \in E$ que l'on déduit de $f^* = -f$.

2) Montrer que pour tout $x \in E$, x et $f(x)$ sont orthogonaux. En déduire les valeurs propres réelles possibles de f .

3) Montrer que $s = f \circ f$ est symétrique.

4) On suppose maintenant que f est bijective.

Soit λ une valeur propre de s et x un vecteur propre associé. Montrer que

$$(s(x) | x) = \lambda \|x\|^2 = -\|f(x)\|^2.$$

En déduire que $\lambda < 0$.

5) On considère toujours x vecteur propre de s pour λ .

Montrer que les espaces $F = \text{Vect}(x, f(x))$ et $F^\perp$ sont stables par f et que l'endomorphisme induit par f sur F a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ où } b > 0.$$

dans une base orthonormale bien choisie. On précisera la valeur de b en fonction de λ .

6) Conclure que la dimension de E est paire.

4 Pour vendredi hyperclassique pour fichier classique

Matrice de Gramm

Soit E un espace euclidien de dimension n et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E . On associe la matrice de Gramm G définie par

$$G = (\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

a) Montrer que G est symétrique.

Calculer pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X^T G X$. En déduire que G est symétrique, positive.

b) Montrer que $G \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ssi $(u_1, \dots, u_n)$ est libre. (on retombera sur un exercice classique sur $\text{Ker}(AA^T)$ et $\text{Ker}(A)$ car $G = AA^T$ pour une matrice A).