Cours de Mathématiques spéciales

MP2

2023-2024

Table des matières

Première partie

Algèbre

Chapitre 1

Structures algébriques usuelles

1.1 Congruences

Définition.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, x et $y \in \mathbb{Z}$. On dit que x est congru à y modulo n, et on note $x \equiv y \bmod (n)$, si $n \mid (x-y)$.

Théorème.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{cases} x \equiv y \bmod (n) \\ y \equiv z \bmod (n) \end{cases} \Rightarrow \quad x \equiv y \bmod (n)\,; \quad x \equiv y \bmod (n) \Rightarrow \begin{cases} x+t \equiv y+t \bmod (n) \\ xt \equiv yt \bmod (n) \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x \equiv y \bmod (n) \\ z \equiv t \bmod (n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z \equiv y+t \bmod (n) \\ xz \equiv yt \bmod (n) \end{cases} .$$

Théorème.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$ alors $(\exists x \in \mathbb{Z}, \quad ax \equiv 1 \bmod (n)) \Leftrightarrow \operatorname{pgcd}(a, n) = 1$.
Dans ce cas, si $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ satisfont à la relation de Bezout $au + bv = 1$ alors $x = u$ convient.

Théorème : (Petit théorème de Fermat

Soient p un nombre premier alors $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad x^p \equiv x \bmod (p)$.

1.2 Structures et sous-structures algébriques.

Définition.

Un groupe est un couple $(G, *)$ où G est un ensemble non vide et une application $* : \begin{cases} G \times G & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & x * y \end{cases}$ (appelée loi de composition interne) vérifiant en outre les propriétés suivantes :

— $\forall (x,y,z) \in G^3, \quad (x*y)*z = x*(y*z)$ (*associativité de* $*$) ;
— $\exists e_G \in G \quad / \quad \forall x \in G, \quad e*x = x*e = x$ (*existence d'un élément neutre*) ; Cet élément est unique.
— $\forall x \in G, \quad \exists y \in G \quad / \quad x*y = y*x = e$ (*existence d'un symétrique (inverse) à tout élément de* G). Cet élément est unique et se note traditionnellement x^{-1} si la loi est notée multiplicativement (i.e. $*$) ou $-x$ si la loi est notée additivement (i.e. $+$).

Le groupe $(G,*)$ est dit commutatif (ou abélien) si : $\forall (x,y) \in G^2, \quad x*y = y*x$.
Soit H un sous-ensemble de G. On dit que H est un sous-groupe de G si $(H,*)$ est un groupe.

Théorème.

Soit $(G,*)$ un groupe alors H est un sous-groupe de G si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées : $H \subset G, \quad e_G \in H, \quad \forall (x,y) \in H^2, \quad x*y \in H, \quad x^{-1} \in H$

Théorème.

Soient $(G,*)$ un groupe et $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G alors $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G.

Définition.

Un anneau $(A,+,*)$ est un triplet où A est un ensemble non vide et de deux applications

$$+ : \left\{ \begin{array}{ccc} A\times A & \to & A \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \right. \quad \text{et} \quad * : \left\{ \begin{array}{ccc} A\times A & \to & A \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \right.$$

(appelées loi de composition interne) vérifiant les propriétés suivantes :
— $(A,+)$ est un groupe abélien (commutatif). *On note* 0_A *l'élément neutre pour* $+$;
— $\forall (x,y,z) \in A^3, \quad x*(y*z) = (x*y)*z$ (*associativité de* $*$) ;
— $\forall (x,y,z) \in A^3, \quad x*(y+z) = (x*y)+x*z$ (*distributivité de* $*$ *sur* $+$) ;
— $\exists 1_A \in A, \quad \forall x \in A, \quad x*1_A = 1_A*x = x$ (1_A *est l'élément neutre pour* $*$) ;

L'anneau $(A,+,*)$ est dit commutatif si la loi $*$ est commutative c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in A^2, \quad x*y = y*x.$$

L'anneau A est dit intègre si : $\forall (x,y) \in A^2, \quad x*y = 0_A \Rightarrow (x = 0_A \text{ ou } y = 0_A)$.
Soit B un sous-ensemble non vide de A, on dit que B est un sous-anneau de A si $(B,+,*)$ est un anneau.

Théorème.

Soit $(A,+,*)$ un anneau alors B est un sous-anneau de A si et seulement si les cinq conditions suivantes sont vérifiées :

$$B \subset A, \quad \left\{ \begin{array}{l} 0_A \in B \\ 1_A \in B \end{array} \right. , \quad \forall (x,y) \in B^2, \quad \left\{ \begin{array}{l} x-y \in B, \\ x*y \in B \end{array} \right. .$$

Définition.

Un corps $(K,+,*)$ est un anneau commutatif tel que : $\forall x \in K\backslash\{0_K\}, \quad \exists y \in K, \quad x*y=1_K$.
Cet élément se note traditionnellement $\frac{1}{x}$ (plutôt que x^{-1} car la loi $*$ est commutative).
Soit L un sous-ensemble non vide de K, on dit que L est un sous-corps de K si $(L,+,*)$ est un anneau.

Théorème.

Soit $(\mathbb{K},+,*)$ un corps commutatif alors $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$ si et seulement si les cinq conditions suivantes sont vérifiées :

$$L\subset\mathbb{K}, \quad \begin{cases} 0_K\in\mathbb{L} \\ 1_{\mathbb{K}}\in\mathbb{L} \end{cases}, \quad \forall (x,y)\in\mathbb{L}^2, \quad \begin{cases} x-y\in\mathbb{L}, \\ x*y\in\mathbb{L} \end{cases}, \quad \forall x\in\mathbb{L}\backslash\{0_{\mathbb{K}}\}, \quad \frac{1}{x}\in\mathbb{L}.$$

Définition.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, une $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathcal{A},+,*,.)$ est un quadruplet tel que $(\mathcal{A},+,*)$ soit un anneau, $(\mathcal{A},+,.)$ soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que $*$ soit une application bilinéaire (pour la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel) c'est-à-dire que :

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \quad \forall(x,y,z)\in\mathcal{A}^3, \quad \begin{cases} x*(\lambda.y+\mu.z)=\lambda.(x*y)+\mu.(x*z) \\ (\lambda.y+\mu.z)*x=\lambda.(y*x)+\mu.(z*x) \end{cases}.$$

Soit $\mathcal{B}$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{A}$, on dit que $\mathcal{B}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}$ si $(\mathcal{B},+,*,.)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Théorème.

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $(\mathcal{A},+,*,.)$ une $\mathbb{K}$-algèbre alors $\mathcal{B}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}$ si et seulement si les six conditions suivantes sont vérifiées :

$$\mathcal{B}\subset\mathcal{A}, \quad \begin{cases} 0_{\mathcal{A}}\in\mathcal{B} \\ 1_{\mathcal{A}}\in\mathcal{B} \end{cases}, \quad \forall\lambda\in\mathbb{K}, \quad \forall(x,y)\in\mathcal{B}^2, \quad \begin{cases} \lambda.x\in\mathcal{B}, \\ x-y\in\mathcal{B}, \\ x*y\in\mathcal{B} \end{cases}.$$

Théorème.

Soient $(G_k,*_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ des groupes, on munit $G_1\times\cdots\times G$ de la loi $*$ définie par :

$$\forall((x_1,..,x_n),(y_1,..,y_n))\in(G_1\times\cdots\times G_n)^2,\ (x_1,..,x_n)*(y_1,..,y_n)=(x_1*_1y_1,..,x_n*_ny_n).$$

Alors $(G_1\times\cdots\times G_n,*)$ est un groupe (appelé groupe produit).

Théorème.

Soient $(A_k, \oplus_k, \otimes_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ des anneaux, on munit $A_1 \times \cdots \times A$ des lois $+$ et $*$ définies par :

$$\begin{array}{rcl} \forall\left((x_1,..,x_n),(y_1,..,y_n)\right) & \in & \left(A_1\times\cdots\times A_n\right)^2, \\ (x_1,..,x_n)+(y_1,..,y_n) & = & (x_1\oplus_1 y_1,..,x_n\oplus_n y_n) \\ (x_1,..,x_n)*(y_1,..,y_n) & = & (x_1\otimes_1 y_1,..,x_n\otimes_n y_n). \end{array}$$

Alors $(A_1 \times \cdots \times A_n, +, *)$ est un anneau (appelé anneau produit).

1.3 Morphismes de structures algébriques.

Définition.

1. Soient $(G, \times)$ et $(H, \otimes)$ deux groupes et $f : G \to H$. On dit que f est un morphisme de groupes si :
$$\forall (x, y) \in G^2, \quad f(x \times y) = f(x) \otimes f(y).$$
On dit que f est un isomorphisme de groupe si f est un morphisme de groupe et f est bijectif.
On appelle noyau et image de f les ensembles notés respectivement $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ définis par :
$$\ker(f) = \{x \in G, \quad f(x) = e_G\}, \quad \mathrm{Im}(f) = \{f(x), \quad x \in G\}$$

2. Soient $(A, +, \times)$ et $(B, \oplus, \otimes)$ deux anneaux et $f : A \to B$. On dit que f est un morphisme d'anneaux si :
$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \begin{cases} f(x+y) = f(x) \oplus f(y) \\ f(x \times y) = f(x) \otimes f(y) \\ f(1_A) = 1_B. \end{cases}.$$
On dit que f est un isomorphisme d'anneaux si f est un morphisme d'anneaux et f est bijectif.
On appelle noyau et image de f les ensembles notés respectivement $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ définis par :
$$\ker(f) = \{x \in A, \quad f(x) = 0_B\}, \quad \mathrm{Im}(f) = \{f(x), \quad x \in A\}$$

3. Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $(\mathcal{A}, +, \times, .)$ et $(\mathcal{B}, \oplus, \otimes, \bullet)$ deux $\mathbb{K}$-algèbres et $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. On dit que f est un morphisme d'algèbres si :
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, \quad \begin{cases} f(\lambda.x) = \lambda \bullet f(x) \\ f(x+y) = f(x) \oplus f(y) \\ f(x \times y) = f(x) \otimes f(y) \\ f(1_A) = 1_B. \end{cases}.$$

Théorème.

Soient $(G,\times)$ et $(H,\otimes)$ deux groupes et $f:G\to H$ un morphisme de groupes alors :

1. $f(e_G)=e_H,\quad \forall x\in G,\quad f\left(x^{-1}\right)=(f(x))^{-1}$.
2. Si G' est un sous-groupe de G alors $f\left(G'\right)=\{f(x),\quad x\in G\}$ est un sous-groupe de H.
3. Si H' est un sous-groupe de H alors $f^{-1}\left(H'\right)=\left\{x\in G,\quad f(x)\in H'\right\}$ est un sous-groupe de G.

Théorème.

Soient $(A,+,\times)$ et $(B,\oplus,\otimes)$ deux anneaux et $f:A\to B$ un morphisme d'anneaux alors :

1. $f(0_A)=0_B,\quad f(1_A)=1_B$.
2. Si A' est un sous-anneau de A alors $f\left(A'\right)=\left\{f(x),\quad x\in A'\right\}$ est un sous-anneau de B.
3. Si B' est un sous-groupe de B alors $f^{-1}\left(B'\right)=\left\{x\in A,\quad f(x)\in B'\right\}$ est un sous-anneau de A.

Théorème.

Soient $(G,\times)$ et $(H,\otimes)$ deux groupes et $f:G\to H$ un morphisme de groupes

1. $\ker(f)$ est un sous-groupe de $(G,\times)$ et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-groupe de $(H,\otimes)$.
2. f est injectif si et seulement si $\ker(f)=\{e_G\}$.
3. Si f est un isomorphisme de G sur H alors f^{-1} est un isomorphisme de H sur G.

Théorème.

Soient $(A,+,\times)$ et $(B,\oplus,\otimes)$ deux anneaux et $f:A\to B$ un morphisme d'anneaux.

1. $\ker(f)$ est un sous-anneau de A et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-anneau de B.
2. f est injectif si et seulement si $\ker(f)=\{0_A\}$.
3. Si f est un isomorphisme de A sur B alors f^{-1} est un isomorphisme de B sur A.

1.4 Idéaux d'un anneau commutatif.

Définition.

Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif .

1. Soit $\mathcal{I}$ un sous-ensemble de A. On dit que $\mathcal{I}$ est un idéal de A si

$$\forall(x,y)\in\mathcal{I},\quad x-y\in\mathcal{I},\quad \forall(a,x)\in A\times\mathcal{I},\quad a\times x\in\mathcal{I}.$$

   En particulier, un idéal de A est un sous-anneau de A (la réciproque est fausse en général).
2. Soit $a\in A$, On note $aA=\{a\times x,\quad x\in A\}$.

Théorème.
Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux alors $\ker(f)$ est un idéal de A.

Théorème.
Soient $(A, +, \times)$ un anneau et $a \in A$ alors aA est un idéal de A.

Définition.
Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et $a, b \in A$. On dit que a divise b (et on note $a \mid b$) s'il existe $x \in A$ tel que $b = a \times x$.

Théorème.
Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et $a, b \in A$. Alors $a \mid b \Leftrightarrow b \in aA \Leftrightarrow bA \subset aA$.

Théorème.
Les idéaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ sont les $n\mathbb{Z} = \{nk, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Théorème.
Les idéaux de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ sont les $P\mathbb{K}[X] = \{PQ, \quad Q \in \mathbb{K}[X]\}$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$.

1.5 Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$.

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

Théorème.
Soient $(A_1, .., A_n) \in (\mathbb{K}[X])^n \setminus \{(0, .., 0)\}$. Il existe un unique polynôme $R \in \mathbb{K}[X]$ unitaire tel que

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} A_k U_k, \quad (U_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in (\mathbb{K}[X])^n \right\} = R\mathbb{K}[X].$$

Définition.
Soient $A_1, .., A_n \in \mathbb{K}[X]$ non tous nuls, on appelle pgcd (plus grand commun diviseur) de $A_1, .., A_n$ l'unique polynôme R unitaire tel que :

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} A_k U_k, \quad (U_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in (\mathbb{K}[X])^n \right\} = R\mathbb{K}[X]$$

et on note $R = \text{pgcd}(A_1, .., A_n)$.

S

oient $A_1, .., A_n \in \mathbb{K}[X]$ non tous nuls.

1. $\forall i \in \{1, .., n\}, \quad \text{pgcd}(A_1, .., A_n) \mid A_i$;
2. il existe $(U_1, .., U_n) \in (\mathbb{K}[X])^n$ tel que $A_1U_1 + \cdots + A_nU_n = \text{pgcd}(A_1, .., A_n)$ (Relation de Bezout) ;
3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall i \in \{1, .., n\}, \quad P \mid A_i$ alors $\text{pgcd}(A_1, .., A_n) \mid P$.

Définition.

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ non tous nuls, on dit que P et Q sont premiers entre eux si $\text{pgcd}(P, Q) = 1$.

Lemme (Gauss) Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A \mid BC$ et $\text{pgcd}(A, B) = 1$ alors $A \mid C$. $AU+BV$.

Définition.

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. On dit que P est irréductible si

$$\forall (Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2, \quad P = QR \Rightarrow (\deg(Q) = 0 \text{ ou } \deg(R) = 0).$$

Lemme Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré 0 ou de degré 1 est irréductible.

Théorème

1. Les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré exactement 1.
2. Les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré exactement 1 ou les polynômes P de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Théorème

Tout polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ est le produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$.
En outre, cette décomposition est unique à permutation près des facteurs.

1.6 Groupes engendrés par une partie.

Définition.

Soit $(G, *)$ un groupe, S une partie non vide de G. On note

$$\langle S \rangle = \left\{ x_1 * \cdots * x_n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall i \in \{1, .., n\}, \quad x_i \in S \text{ ou } x_i^{-1} \in S \right\}.$$

Le théorème suivant prouve que $\langle S \rangle$ est un sous-groupe de G et que c'est le plus petit sous-groupe de G contenant S. $\langle S \rangle$ s'appelle le sous-groupe de G engendré par (la partie) S.

Théorème

Soit $(G,*)$ un groupe, S une partie non vide de G.

1. $\langle S\rangle$ est un sous-groupe de G ;
2. Si H est un groupe de G tel que $S\subset H$ alors $\langle S\rangle\subset H$.

Théorème.

Soit $(G,*)$ un groupe commutatif, $S=\{a_1,..,a_r\}$ une partie non vide de G alors

$$\langle S\rangle=\{a_1^{n_1}\cdots a_r^{n_r},\quad (n_1,..,n_r)\in\mathbb{Z}^r\}\,.$$

Définition.

Un groupe $(G,*)$ est dit :
— monogène s'il existe $a\in G$ tel que $G=\langle a\rangle$;
— cyclique s'il est monogène et de cardinal fini.
Si $(G,*)$ est monogène, un élément $x\in G$ est appelé générateur de G si $G=\langle x\rangle$.

Théorème.

Les sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$ sont exactement les groupes

$$\langle n\rangle=n\mathbb{Z}=\{nk,\quad k\in\mathbb{Z}\}$$

Définition.

Soient $(G,*)$ un groupe et $x\in G$. On dit que x est d'ordre fini s'il existe un entier $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $x^N=e_G$. Si a est d'ordre fini, on appelle ordre de x l'entier noté $o(x)$ défini par :

$$o(x)=\min\left\{k\in\mathbb{N}^*,\quad x^k=e_G\right\}.$$

Théorème.

Soient $(G,*)$ un groupe et $x\in G$ un élément d'ordre $d\in\mathbb{N}^*$. Soit $n\in\mathbb{N}$ alors $x^n=e_G\Leftrightarrow d\mid n$.

Théorème.

Soient $(G,*)$ un groupe et $x\in G$ un élément d'ordre $d\in\mathbb{N}^*$ alors $d\mid \mathrm{card}\,(G)$.

Lemme Si $(G,*)$ est un groupe cyclique et $a\in G$ tel que $G=\langle a\rangle$ alors $o(a)=\mathrm{card}\,(G)$.

1.7 Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Définition.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{Z}$, on appelle classe de x le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ défini par :

$$\overline{x} = \{y \in \mathbb{Z}, \quad y \equiv x \bmod (n)\} = \{y \in \mathbb{Z}, \quad y - x \in n\mathbb{Z}\}.$$

On appelle représentant d'une classe $\overline{x}$ tout élément $y \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{x} = \overline{y}$. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes $\overline{x}$, $x \in \mathbb{Z}$.

Lemme Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{Z}$ alors $\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow x \equiv y \bmod (n)$.

Théorème.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\overline{k}, \quad k \in \{0, .., n-1\}\right\}$ et $\text{card}\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$.

☞ Il est immédiat que si $n = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad \overline{x} = \{x\} \Rightarrow \mathbb{Z}/0\mathbb{Z}$ est en bijection avec $\mathbb{Z}$ (via $x \in \mathbb{Z} \mapsto \{x\} \in \mathbb{Z}/0\mathbb{Z}$) qui est un ensemble infini.

Théorème.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les applications

$$\oplus_n : \left\{ \begin{array}{lll} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ (\overline{x}, \overline{y}) & \mapsto & \overline{x} \oplus \overline{y} = \overline{x+y} \end{array} \right. \quad et \quad \otimes_n : \left\{ \begin{array}{lll} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ (\overline{x}, \overline{y}) & \mapsto & \overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{xy} \end{array} \right.$$

sont bien définis sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ est un anneau commutatif (de cardinal n) d'éléments neutres $\overline{0}$ pour $\oplus$ et $\overline{1}$ pour $\otimes$.

✍ Dans toute la suite, on conviendra de noter $+$ au lieu de $\oplus_n$ et $\times$ au lieu de $\otimes_n$.

Théorème.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ alors $\overline{x}$ est inversible si et seulement si $\text{pgcd}\,(x, n) = 1$. Dans ce cas, si $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ forment la relation de Bezout $ux + vn = 1$ alors $\overline{x}^{-1} = \overline{u}$.

Théorème.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps si et seulement si n est un nombre premier.

Théorème : (lemme chinois)

Soient $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ deux entiers premiers entre eux alors l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} & \to & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \\ \overline{x} = \{y \in \mathbb{Z}, \quad nm \mid (y-x)\} & \mapsto & (\overline{x} = \{y \in \mathbb{Z}, \quad n \mid (y-x)\}, \overline{x} = \{y \in \mathbb{Z}, \quad m \mid (y-x)\}) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Théorème.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe cyclique et $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est générateur de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ si et seulement si $\text{pgcd}(x,n) = 1$.

Théorème.

Un groupe $(G, *)$ monogène est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$ si G est infini ou à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ si G est de cardinal fini et $n = \text{card}(G)$.

1.8 Indicatrice d'Euler

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi(n) = \text{card}(\{k \in \{1,..,n\} \quad / \quad \text{pgcd}(k,n) = 1\})$. On appelle indicatrice d'Euler l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N}^* \\ n & \mapsto & \varphi(n) \end{array} \right.$.

Théorème.

1. Si $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $\text{pgcd}(n,m) = 1$ alors $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.
2. Soient p est un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$ alors $\varphi\left(p^k\right) = p^{k-1}(p-1)$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(n) = n \prod_{\substack{p \mid n \text{ et} \\ p \text{ premier}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Théorème.

(d'Euler) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\forall \overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui est inversible, on a $\overline{x}^{\varphi(n)} = \overline{1}$.

Chapitre 2

Compléments algèbre linéaire

2.1 Matrices semblables

2.1.1 Généralités

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition matrices semblables

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit qu'elles sont semblables si et seulement si il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A = PBP^{-1}$$

Remarques

- C'est une relation d'équivalence, en particulier elle est symétrique.
- On s'intéresse à cette relation du fait de la formule de changement de bases :

Il faut connaitre par coeur la formule de changement de bases, la définition des matrices de passages. En MP2, la notation pour la matrice passage de la base $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$ est $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ ou $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, on rappelle que :

la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est la matrice de

La formule de changement de bases s'interprète alors comme une composition d'endomorphismes.

Exercice 1

Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure d'espace vectoriel usuel . On donne

$$H = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y + z = 0 \}$$

$$K = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

a) Déterminer dim$H$ et donner une base.

C'est une conséquence du théorème du rang , dans ce cas très simple on pourrait ne pas rédiger mais dans le cas général expliciter où intervient le théorème du rang.

b) Démontrer que $H \oplus K = \mathbb{R}^3$.

Pour démontrer une somme directe de **2** sous espaces vectoriels on utilise :

c) Donner l'expression analytique de la projection sur H parallèlement à K sans utiliser la formule de changement de base vue en sup. Puis à l'aode de la formule de changements de bases.

Exercice 2= alg 71

Soit p, la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

La formule de changement de bases donne des résultats sur les classes de similitudes (les matrices semblables). On rappelle que pour les matrices **équivalentes** on a le théorème suivant :

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Pour les matrices semblables, on a que des résultats partiels : des conditions nécessaires :

Si deux matrices sont semblables alors elles ont même rang, même trace, même déterminant.

Les démonstrations sont à avoir refaire par exemple :

Exercice 3

1. Démontrez que si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n alors AB et BA ont même trace.
2. Déduisez-en qu'en dimension finie, toutes les matrices d'un même endomorphisme ont même trace.
3. Démontrez que si A et B sont semblables alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k ont même trace.

Pour démontrer que deux matrices sont semblables (ou pas) il faut toujours avoir l'idée en tête qu'il y a un endomorphisme canoniquement associé à la matrice (il se peut aussi que la matrice ait été obtenue par l'écriture d'un endomorphisme défini intrinsèquement)

Exercice 4

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.
a) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Démontrer que ces sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
b) Déterminer une base adaptée à cette supplémentarité et écrire la matrice de f dans cette base.
c) Décrire f comme composée de transformation vectorielle.

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.
a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ est D. On pourra faire une analyse synthèse.
b) Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.
c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2.1.2 Un exemple détaillé et des compléments : projecteurs

Défintion

Soit E un espace vectoriel (éventuellement de dimension infinie), et $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un projecteur si et seulement si :

$$p \circ p = p \text{ on écrira quand on sera grand } p^2 = p$$

Toutes les résultats et démonstrations à suivre sont à bien connaître.

Les projecteurs sont des projections (et inversement)

Si p est un projecteur alors $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$. De plus, $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(p)$. p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Démonstration

Les conséquences sont nombreuses , par exemple cet exercice hyper classique :

Exercice 6

Soit p un projecteur de E un espace vectoriel de dimension finie alors $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$. En déduire que $\mathrm{rg}(p \circ q) = \mathrm{rg}(q \circ p)$ où p et q sont des projecteurs.

Sommes directe de plusieurs sous-espaces vectoriels

On peut donner une définition de la somme directe par récurrence. Je ne souhaite pas la redonner ici car elle est très peu usité. On apprendra :

définition ou théorème selon le cours de sup

Soit $E_1, \ldots, E_k$ une famille finie d'espaces vectoriels, on dit qu'ils sont en somme directe si l'implication suivante est vérifiée :

$$\forall (x_1, x_2, .., x_k) \in (E_1 \times E_2 \times \ldots E_k), \text{ tel que } x_1 + x_2 + \ldots x_k = 0 \Longrightarrow \forall i, x_i = 0.$$

Si c'est. le cas, alors un vecteur de $(E_1 \times E_2 \times \ldots E_k)$ se décompose de manière unique (mais ce n'est pas ainsi que l'on démontre somme directe . Il est important que la situation pour deux sous-espaces en somme directe ne se généralise pas (définition à partir de l'intersection).

Théorème

Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie,

$$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i),$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe.

Supposons que $E = \bigoplus E_j$ où les E_j sont des sous espaces vectoriels de E. Alors pour tout i, il existe p_i la projection sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} E_j$. De plus :

$$Id_E = p_1 + p_2 + \cdots + p_k.$$

2.2 Stables $\longleftrightarrow$ blocs

2.2.1 Sous espace stable

Stable

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est stable par u si et seulement si

$$u(F) \subset F$$

C'est à dire $\forall x \in F$, $u(x) \in F$.

La notion de sous-espace stable est fondamentale, en effet si F est stable par u on peut considérer $u_{|_F}$ la restriction de u qui est un endomorphisme de F dans F. On verra que cela permet de faire des récurrences sur les dimensions des sous-espaces vectoriels.

En dimension finie, si on choisit une base de F on peut compléter cette base en une base de E, on a alors la caractérisation de la stabilité par l'écriture matricielle.

Théorème de caractérisation de la stabilité

Soit F un sous-espace vectoriel de E (en dimension finie), et $(e_1, \dots e_p)$ base de F. F est stable par u si et seulement si :

Pour tout base de E, $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_p, f_1, \dots f_{n-p})$ (obtenue par complétion) , alors la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ (0) & B \end{pmatrix}$$

où A est la matrice de la restriction de u à F

Notons qu'il n'est malheureusement pas possible d'interpréter B comme la matrice d'un endomorphisme (lié à u) et encore moins C qui n'est pas carrée.

2.2.2 Produits par blocs

Soit $(n,p,q)) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \updownarrow \\ \vdots \\ \alpha_n \updownarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \beta_1 & & \beta_p \\ \leftrightarrow & & \leftrightarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} (A_{11}) & \dots & (A_{1p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_{n1}) & \dots & (A_{np}) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ \beta_1 \updownarrow \\ \vdots \\ \beta_p \updownarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \gamma_1 & & \gamma_q \\ \leftrightarrow & & \leftrightarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} (B_{11}) & \dots & (B_{1q}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (B_{p1}) & \dots & (B_{pq}) \end{pmatrix} \end{array}$$

où

$$\begin{cases} A_{ij} & \in & \mathcal{M}_{\alpha_i,\beta_j}(\mathbb{K}) \\ B_{kl} & \in & \mathcal{M}_{\beta_k,\gamma_l}(\mathbb{K}) \end{cases}.$$

Alors

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ C_{n1} & \dots & C_{nq} \end{pmatrix}.$$

où

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj}$$

Attention l'ordre du produits des matrices est important $A_{ik}B_{kj}$ existe mais peut être pas $B_{kj}A_{ik}$.

Pour le déterminant, on retiendra on peut faire le produit des déterminants des blocs diagonaux (encore faut-il que la matrice soit de cette forme)

$$\det \begin{pmatrix} (A_{11}) & & (B) \\ & \ddots & \\ (0) & & (A_{pp}) \end{pmatrix} = \det A_{11} \times \dots \det A_{pp}.$$

Théorème

Si $E_1, \dots, E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus E_i$ et si $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tout i $u_{|_{E_i}} = u_i$.

Que pensez vous alors de la matrice de cette application u dans une base adaptée à la somme directe ?

2.2.3 Application : d'après ccinp 2018

1. On pose que $V = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

   Etudiez $\mathrm{Ker}(V - I_2)$ et $\mathrm{Ker}(V - 2I_2)$, en particulier donnez une base de ces deux sous-espaces et montrer qu'ils sont supplémentaires. On considère u l'endomorphisme canoniquement associé

à la matrice V, montrer que la matrice de u dans une base associée à
$\mathrm{Ker}(V - I_2) \oplus \mathrm{Ker}(V - 2I_2) = \mathbf{R}^2$ est diagonale et donner une matrice inversible P que l'on notera $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et une matrice diagonale vérifiant $V = PDP^{-1}$ (on précisera P^{-1}).

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On pose alors la matrice par blocs $Q = \begin{pmatrix} \alpha I_n & \beta I_n \\ \gamma I_n & \delta I_n \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice Q est inversible, donner la matrice Q^{-1} et démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$.

3. On suppose que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbf{R}$, ce qui signifie qu'il existe une matrice R inversible et une matrice Δ diagonale telles que $A = R\Delta R^{-1}$. Calculer le produit de matrices par blocs

$$\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

Que peut-on en déduire pour la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$?

2.3 Où l'on apprend l'efficacité de l'algèbre linéaire en dimension finie

On se pose une question assez simple étant données n points distincts de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$, peut-on déterminer une courbe polynômiale passant par ces n points. Ainsi, par deux points, il passe une droite (et une seule) et par trois points une parabole.

On rappelle le théorème suivant fondamental :

Théorème

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors on a les équivalences suivantes :

- u est surjective .
- u est injective.
- u est bijective.

Remarque : on a toujours $\dim(u(F)) \leq \dim(F)$, et pourquoi d'ailleurs ?

Ceci n'est pas vraiment un exercice

Soient fixés n réels distincts de $\mathbb{K}$ $(x_1, \ldots, x_n)$, on considère l'application φ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$ définie par

$$\varphi(P) = \big(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)\big).$$

a) Montrer que φ est une application linéaire.
b) Montrer que φ est injective puis bijective.
c) Montrer que $\forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n \ \exists! P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \ P(x_i) = y_i$.
Ce polynôme se nomme polynôme interpolateur de Lagrange, donnez son expression à l'aide des polynômes de Lagrange.

On peut aussi utiliser le théorème des équivalences pour démontrer la dimension d'un espace vectoriel, c'est à la fois élégant et rapide

Suites récurrentes d'ordre 2 (ou p cela ne change pas grand chose)

Soit :

$$F = \{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbf{R}^n | \forall n \in \mathbb{N} u_{n+2} = 2022u_{n+1} + 2023u_n\}.$$

Montrer que F est un espace vectoriel de dimension 2.

2.4 Hyperplans

Hyperplan

On dit que F est un hyperplan de E si F est le noyau d'une forme linéaire **non nulle**. On rappelle qu'une forme linéaire est une application linéaire de E dans K.

Théorème

Si F est un hyperplan de E et $x \notin E$ alors :

$$F \oplus \text{Vect x} = E.$$

exercice 1 il faut savoir se laisser guider

☞Attention de théorème est valable en dimension infinie, on laisse le soin aux lecteurs de faire une autre démonstration en dimension finie. On note φ une forme linéaire telle que F =Ker(φ).

• Montrons $F \cap \text{Vect}(x) = \emptyset$. Soit $y \in F \cap \text{Vect}(x)$ alors $\exists k \in K$ tel que $y = kx$ donc $\varphi(y) = k\varphi(x)$ mais $y \in \text{Ker}(\varphi)$ donc $0 = k\varphi(x)$, et $\varphi(x) \neq 0$ donc $f = 0$ et $y = 0$.

• Pout découvrir la décomposition faisons une analyse synthèse, soit $y \in E$, supposons qu'il existe $u_1 \in F$ et $u_2 \in \text{Vect}(x)$ tel que $y = u_1 + u_2$ mais alors $\varphi(y) = \varphi(u_2)$ et $u_2 = \lambda x$ pour un certain scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. Mais alors $\varphi(u_2) = \lambda\varphi(x)$ donc il faut (et on peut car $\varphi(x) \neq 0$) choisir

$$\lambda = \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}$$

et donc $u_2 = \dfrac{\varphi(y)}{\varphi(x)}x$ et on n'a pas le choix $u_1 = y - u_2$.

• Ecrivons $y = \dfrac{\varphi(y)}{\varphi(x)}x + y - \dfrac{\varphi(y)}{\varphi(x)}x = u_2 + u_1$. On a bien évidement $u_2 \in \text{Vect}(x)$ et

$$\varphi(u_1) = \varphi\Big(y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}x\Big) = \varphi(y) - \varphi(y) = 0$$

donc $u_1 \in F$.

remarque : on pourrait se passer de l'intersection car l'analyse montre l'unicité de la décomposition.

Chapitre 3

Réduction des endomorphismes.

3.1 Point de vue algébrique.

3.1.1 Valeur d'un polynôme sur un endomorphisme.

Définition.

On appelle valeur de $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ en $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application

$$P(u) \underset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k u^k \in \mathcal{L}(E)$$

LE morphisme.

Th : L'application $\phi_u : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\phi_u(P) = P(u)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre.

Ce résultat fait l'objet d'un exercice de la banque ccinp le 65 :

65

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], \quad (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

2. (a) Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

   (b) Démontrer que pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:
   (P polynôme annulateur de u)$\Longrightarrow$ (PQ polynôme annulateur de u)

3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

3.1.2 Polynôme en un endomorphisme.

Définition.

On dit que $v \in \mathcal{L}(E)$ est un polynôme en $u \in \mathcal{L}(E)$ s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v = P(u)$. On note $\mathbb{K}[u]$ l'ensemble des polynômes en u :

$$\mathbb{K}[u] \underset{def}{=} \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[u]\}$$

Remarque. $\mathbb{K}[u]$ est l'image du morphisme d'algèbre vu en introduction : c'est donc un espace vectoriel.

Structure de $\mathbb{K}[u]$.

Th : $\mathbb{K}[u]$ est une sous algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$. Si A est une sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant u alors $\mathbb{K}[u] \subset A$. $\mathbb{K}[u]$ est la plus petite sous algèbre de E contenant u.

3.1.3 Polynôme en une matrice carrée.

Définition

On appelle valeur de $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice

$$P(M) \underset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k M^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

On obtient les mêmes résultats que dans le cas des endomorphismes.

Quelques résultats que l'on peut considérer comme au programme :

Si A est une matrice diagonale égale à $\text{Diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ alors $P(A) = \text{Diag}(P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n))$.

Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire alors $P(A) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$ l'est aussi.

Si A est une matrice diagonale par blocs $\text{Diag}(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ alors $P(A) = \text{Diag}(P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_k))$.

3.1.4 Polynômes annulateurs.

Définition.

Soit u un endomorphisme de E. On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

(même définition pour les matrices)

Dire que P est annulateur de u c'est dire que P appartient au noyau du morphisme du début du cours.

Idéal annulateur : c'est un théorème et une définition.

on note :

$$\mathcal{I}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$$

l'idéal annulateur de u. C'est un **idéal**, c'est à dire :
- $\mathcal{I}(u)$ est non vide, et stable par pour l'addition de $\mathbb{K}[X]$.
- Si $P \in \mathcal{I}(u)$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ alors $PQ \in \mathcal{I}(u)$.

De plus $\mathcal{I}(u) = \ker(\phi_u)$. ⚠

Si E est de dimension finie, le morphisme ϕ_u n'est jamais injectif, en effet l'espace d'arrivée $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie et $\mathbb{K}[X]$ est de dimension finie, le noyau n'est donc pas réduit à $\{0\}$.

Exercice.

Montrer que si E est de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ alors il existe un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à n^2.

Remarque ce résultat est faible, on aura un théorème plus fort

Exercice.

Donner un polynôme annulateur d'une projection, d'une symétrie.

On admet ici un théorème qui sera (peut être démontré dans le chapitre arithmétique, le résultat est directement lié à la division euclidienne)

Structure des idéaux de $\mathbb{K}[X]$.

Th : Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{K}[X]$, alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\mathcal{I} = \{P \times Q \mid Q \in \mathbb{K}[X]\} = P.\mathbb{K}[X].$$

De plus, le polynôme P est unique si on l'impose d'être unitaire.

On en déduit la définition suivante et proposition associée :

Polynôme minimal de u.

Th : Soit u un endomorphisme de E. On appelle polynôme minimal π_u de u, l'unique polynôme unitaire tel que :

$$\mathcal{I}_u = \pi_u \mathbb{K}[X]$$

Autrement dit : tous les polynômes annulateurs de u sont multiples de ce polynôme minimal.

théorème.

Th : Si on note d le degré du polynôme minimal de u alors la famille $Id, u, \ldots, u^{d-1}$ forme une base de $\mathbb{K}[u]$.

3.1.5 Lemme de décomposition des noyaux.

VERY IMPORTANT théorème de décomposition des noyaux.

Th : Soient P, Q deux polynômes premiers entre eux alors

$$\ker(PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u).$$

Plus généralement :
Si $P_1, P_2, .., P_n$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux

$$\ker\left(\prod_{k=1}^{n} P_k\right)(u) = \bigoplus_{k=1}^{n} \ker P_k(u)$$

Une application pas si évidente.

1) Factoriser le polynôme $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.
2) On considère l'équation différentielle :

$$y^{(3)} - 6y^{(2)} + 11y' - 6y = 0.$$

2a) Montrer que y est solution de l'équation différentielle si et seulement si y appartient au noyau d'une certaine application linéaire.
2b) En considérant l'endomorphisme $D : y \mapsto y'$, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.

3.1.6 Caractérisation algébrique de la diagonalisation.

Diagonalisable.

1) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E. On dit que u est un endomorphisme diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit diagonale. Une telle base est dite base de diagonalisation pour u.
2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; on dit que M est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonalisable.

Critère algébrique de diagonalisation.

Th : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$
u est diagonalisable si et seulement si u annule un polynôme scindé à racine simples.

Ce théorème est très pratique dans certaines situations :

Rappel.

Soit E un espace vectoriel , et $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous espace vectoriel de E.On dit que F est stable par u si$u(F) \subset F$. Dans ce cas, on appelle endomorphisme induit par u sur F l'application notée $u_{|F}$.

$$u_{|F} : \ F \to F \quad x \mapsto u(x) \ .$$

C'est au programme mais connaître la démonstration.

Montrer que si u est diagonalisable et F un sous-espace stable de u, alors $u_{|F}$ est diagonalisable.
Montrer (rapidement) qu'un projecteur est diagonalisable.

Il est parfois indispensable d'utiliser ce théorème :

exercice difficile qui sera traité en plusieurs fois

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $F \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ définie par $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ F(u) = f \circ u$.
a) Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, F l'est. Dans ce cas, déterminer une relation entre $\dim(E_\lambda(f))$ et $\dim(E_\lambda(F))$, lorsque $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.
b) Montrer que f et F ont les mêmes valeurs propres.

c) Tous les éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ sont-ils de la forme $u \mapsto f \circ u$?

3.2 Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice

Éléments propres

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (de dimension finie ou non) et u un endomorphisme de E.

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **Valeur propre** de u ssi $\exists x \in E, \quad x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x$.
2. On dit que $x \in E$ est un **vecteur propre associé à la valeur propre** λ de u ssi $x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x$.
3. On appelle **sous-espace vectoriel propre associé à la valeur propre** λ de u , le sous espace vectoriel $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\ \mathrm{Id}_E)$.
4. Les éléments propres de u sont les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.
5. On appelle spectre de u, on note $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u.

☞Si on oublie $x \neq 0$ dans les définitions ci-dessus, cela devient idiot car tous les scalaires deviennent des valeurs propres. Il faudra donc, pour justifier qu'un scalaire une valeur propre bien notifié que l'on a trouvé un vecteur propre non nul.

☞$\mathrm{Ker}(u - \lambda\ \mathrm{Id}_E)$ n'est pas l'ensemble des vecteurs propres de u car il contient le vecteur nul ! Donc quand on a besoin d'utiliser un vecteur propre écrire : soit x un vecteur propre associé à λ plutôt que $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda\ \mathrm{Id}_E)$.

☞$u(x) = \lambda x$ s'appelle l'équation aux valeurs propres. Sauf utilisation du polynôme caractéristique, on résoudra cette équation par analyse synthèse.

☞**Droite Stable** Si D est une droite stable par u de vecteur directeur $\vec{a}$ alors $u(\vec{a})$ appartient à D

car D est stable donc s'écrit $\lambda\vec{a}$ pour un certain scalaire λ. Il y a donc équivalence entre $\vec{a}$ est vecteur propre de u et la droite Vect$(\vec{a})$ es stable par u.

remarque (cela ne vaut pas le titre de théorème)

1) λ valeur propre de $u \iff (u - \lambda Id_E)$ non injectif

2) Pour λ valeur propre de u , $E_\lambda(u) \neq \{0_E\}$.

3) $E_\lambda(u)$ est la réunion disjointe de $\{0_E\}$ et de l'ensemble des vecteurs propres associés à λ.

Somme directe de sous-espaces propres.

Th. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (de dimension finie ou non) et u un endomorphisme de E.

1) Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de valeurs propres de u deux à deux distinctes et $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs telle que pour tout $i \in I$, $\vec{x}_i$ est vecteur propre associé àλ_i. Alors la famille des $\vec{x}_i$ est libre.

2) Soit $(\lambda_i)_{i\in[|1,s|]}$ une famille finie de valeurs propres de u deux à deux distincts alors la somme $\sum_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}(u)$ est directe.

3) Si E est de dimension finie n alors le spectre de u est fini de cardinal au plus n.

Stabilité de sous-espaces propres.

Si u et v commutent alors tout sous-espace propre de u est stable par v. (ainsi que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.)

Formule fondamentale et conséquences.

Th. 1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(\vec{a}, \lambda)$ un couple de valeur propre vecteur propre de u. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ alors :

$$P(u)(\vec{a}) = P(\lambda)\vec{a}.$$

2) Le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de n'importe quel polynôme annulateur de u.

3) Les racines de π_u dans $\mathbb{K}$ sont LES valeurs propres de u.

4) Si λ est une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,$P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$.

3.2.1 Cas de la dimension finie.

- Polynôme caractéristique.

Fondamental pour la suite

Th. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E.

$$(\lambda \text{ valeur propre de } u) \iff \quad det(\lambda Id_E - u) = 0$$

remarque Même si on n'a pas le droit de considérer des matrices à coefficients dans un anneau (les polynômes), on aprle de polynôme caractéristique, car on n'a pas faire de différence entre fonction polynomiale et polynôme.

Th. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E.
1) L'application $\chi_u : \lambda \mapsto det(\lambda Id_E - u)$ est une application polynôme.
2) χ_u est de degré n et même $\chi_u(\lambda) = \lambda^n - Tr(u)\lambda^{n-1} + \cdot + (-1)^n det(u)$.

Th. Sp(u) est l'ensemble des racines de χ_u

Endomorphsimes induits.

Th.
a) Si F est stable par u alors $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u.

b) Si M est une matrice triangulaire de coefficients a_i sur la diagonale alors $\chi_M = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$.

Multiplicité d'une valeur propre.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E et λ une valeur propre de u.

On appelle **multiplicité de la valeur propre** λ sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique (notation standard m_λ)

$F_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{Id})^{m_\lambda}$ est le sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ. On a toujours $E_\lambda \subset F_\lambda$.

Very Big théorème.

1) Soit $\lambda \in$ Sp(u), on a $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda$.
2) Dim $(\ker(u - \lambda \mathrm{Id})^{m_\lambda}) = m_\lambda$ où m_λ est la multiplicité de λ.

3.2.2 Eléments propres d'une matrice carrée.

Le cas des matrices (rapidement)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$ à coefficient dans $\mathbb{K}$.

1) On appelle **endomorphisme canoniquement associé à** M l'endomorphisme $u_M \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ qui a pour matrice M dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$

2) Les éléments propres de la matrice M sont les éléments propres de l'endomorphisme u_M associé, autrement dit :

- $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M si et seulement si $\exists X \in \mathbb{K}^n$, $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$ et $MX = \lambda X$.
- Un tel X est un vecteur propre associé la valeur propre λ de M.
- Le sous espace propre associé à la valeur propre λ de M est le sous espace $E_\lambda(M) = \ker(u_m - \lambda Id_{\mathbb{K}^n}) = \{X \in \mathbb{K}^n \mid MX = \lambda X\}$.
- Le spectre de M est l'ensemble des valeurs propres de M . On le note $Sp(M)$

3) Le polynôme caractéristique de M ,noté χ_M ou P_M est le déterminant $\chi_M(x) = det(M - xI_n)$. Pour $\lambda \in Sp(M)$, sa multiplicité est sa multiplicité en tant que racine du polynôme χ_M.

Th. Forme du polynôme caractéristique.
(1)$\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(M) \iff \chi_M(\lambda) = 0$
$\iff \mathrm{rg}(M - \lambda I_n) \leq (n-1)$
2) $\chi_M(x) = x^n - 1\mathrm{tr}(M)x^{n-1} + ... + (-1)^{n-1}\mathrm{tr}(\mathrm{Com}(M))x + (-1)^n\det(M)$
3) $\chi_{M^T} = \chi_M$.
4) Si A et B sont deux matrices semblables alors $\chi_A = \chi_B$ donc $Sp(A) = Sp(B)$. De plus , si $B = PAP^{-1}, \forall \lambda \in Sp(A), E_\lambda(B) = P\Big(E_\lambda(A)\Big) = \{PX \mid X \in E_\lambda(A)\}$.

3.3 Diagonalisation (géométrie).

rappel 1

1) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E. On dit que u est un endomorphisme diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit diagonale. Une telle base est dite base de diagonalisation pour u.

2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; on dit que M est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonalisable.

rappel 2

1) Soit $\mathcal{B}_0$ une base quelconque de E, u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}_0)$ est diagonalisable.

2) M est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable.

Critère géométrique de diagonalisation.

Th : Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$, alors les propositions suivantes sont équivalentes.
1) u est diagonalisable.
2) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
3) Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.
4) E est la somme directe des sous-espaces propres de u ie

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$$

5) La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E.

Ce théorème montre que le seul espoir de diagonaliser u est de trouver une base de vecteurs propres.

Une condition suffisante.

Si u admet $\dim(E)$ valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable.

Troisième critère de diagonalisation.

Th : Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de E de dimension finie $n \geq 1$. u est diagonalisable si et seulement si
χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in Sp(u)$, $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$

3.4 Théorème de Cayley Hamilton.

Théorème de Cayley Hamilton.

Th :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\neq 0$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ on a :

$$\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur ou encore π_u divise χ_u.

Le résultat suivant est pas au programme (sauf peut être le 2) mais c'est une conséquence des 2 plus gros théorèmes du chapitre.

CayleyHamilton+ th de décompositions des noyaux

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé , notons $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s\}$ et m_i la multiplicité de la valeur propre λ_i, on a
1) $E = \bigoplus_{k=1}^{s} \ker[(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_k}]$
2) Les projecteurs associés sont des polynômes en u.
3) Dans une base adaptée à la somme directe la matrice de u est diagonale par blocs. Chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes égaux.
4) $\forall k \in [\![1, s]\!]$, $\dim(\ker[(u - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{m_k}]\!]) = m_k$ (ce dernier résultat est au programme.)

3.4.1 Endormorphismes-matrices trigonalisables.

Définition 1) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E. On dit que u est un endomorphisme trigonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit triangulaire. Une telle base est dite base de trigonalisation pour u.
2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; on dit que M est trigonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Lien entre les deux définitions.

1) Soit $\mathcal{B}_0$ une base quelconque de E, u est trigonalisable si et seulement si $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}_0)$ est trigonalisable.
2) M est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé est trigonalisable.

caractérisation fondamentale

Th : Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de E de dimension finie $n \geq 1$.
1) u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.
2) u est trigonalisable si et seulement si il annule un polynôme annulateur scindé.
3) u est trigonalisable si et seulement si π_u est scindé.

Th :1) tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ est trigonalisable.
2) Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Remarque : il existe des endomorphismes (même en dimension finie) qui n'admettent pas de valeur propre, cependant tous les endomorphismes en dimension finie admettent une trace et un déterminant : le résultat suivant mérite donc une hypothèse mais on peut l'éviter en considérant le spectre complexe de u (on a le droit).

Th : Soit u tel que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ alors la trace est la somme des valeurs propres et le déterminant le produit (en comptant les multiplicités)

3.5 Endomorphisme nilpotent

Endomorphisme nilpotent

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent s'il exsite $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^n = 0$.

Th : ✠
a) $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement si il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.
b) L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.

Chapitre 4

Espaces préhilbertiens

4.1 Produit scalaire

Définition.

On appelle produit scalaire (euclidien) sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E toute application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant

(i) ϕ est bilinéaire

(ii) ϕ est symétrique : $\forall x, y \in E, \phi(x, y) = \phi(y, x)$

(iii) ϕ est positive : $\forall x \in E \ \phi(x, x) \geq 0$.

(iv) ϕ est définie : $\forall x \in E \ \phi(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Rappel :

Définition.

Soit E un K- espace vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) . On dit que N est une norme sur E, si et seulement si elle vérifie :

1) N est une application de E dans $\mathbb{R}_+$

2° $\forall x \in E$, $N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$

3) $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in K, \quad N(\lambda x) = \mid \lambda \mid N(x)$

4) $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

Définition.

Une distance sur un ensemble non vide X est une application d de X^2 dans $\mathbb{R}$ telle que :

1) $\forall (x, y) \in X^2$, $d(x, y) \geq 0$

2)$\forall x \, d(x, x) \geq 0$

3)$\forall (x, y) \in X^2$, $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

4) $\forall (x, y) \in X^2$, $d(x, y) = d(y, x)$.

5) $\forall (x, y, z) \in X^3$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Théorème.

distance associée à une norme

Si (E, N) est un espace vectoriel normé alors en posant $d(x, y) = N(x - y)$ on définit une distance sur E dite distance associée à d.

Définition.

Soit E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(. \mid .)$. On appelle **norme associée au produit scalaire** ou **norme euclidienne associée au produit scalaire** l'application définie sur E par $x \mapsto || x ||= \sqrt{(x \mid x)}$.

Théorème : inégalité de Cauchy Schwarz

$$\forall x, y \in E, \ \mid (x \mid y) \mid \leq || x || \, . \, || y ||$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

Théorème :inégalité de Minkowski

$$\forall x, y \in E, \ || x + y || \leq || x || + || y ||$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés et $(x \mid y) \geq 0$ (on dit que x et y sont positivement liés).

Théorème :la norme euclidienne est une norme

Théorème.

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2 \ (x \mid y) &= \frac{1}{2}(|| x + y ||^2 - || x ||^2 - || y ||^2) \\ &= \frac{1}{4}(|| x + y ||^2 - || x - y ||^2) \end{aligned}$$

Théorème.

$\forall (x, y) \in E^2 \ || x + y ||^2 - || x - y ||^2 = 2(|| x ||^2 + || y ||^2)$

4.2 Orthogonalité

4.2.1 orthogonalité

Définition.

On dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si $(x \mid y) = 0$

On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est orthogonale si et seulement si

$$\forall i, j \in I,\ i \neq j \Longrightarrow (e_i \mid e_j) = 0$$

Théorème.

Une famille de vecteurs orthogonaux **ne comportant pas de vecteurs nuls** est libre

Théorème.

Pythagore

Si $(e_1, e_2, .., e_n)$ est orthogonale alors

$$|| e_1 + e_2 + .. + e_n ||^2 = || e_1 ||^2 + || e_2 ||^2 + \cdots + || e_n ||^2$$

Définition.

on appelle base orthonormée de E toute base de E qui soit une famille orthonormée et qui est une base

Théorème de la famille orthonormée incomplète

Si E est un espace vectoriel EUCLIDIEN (de dimension finie) alors toute famille orthonormée peut être complétée en une base orthonormée

Théorème :écriture matricielle d'un produit scalaire en base orthonormée

Cas euclidien :Si X et Y sont les vecteurs colonnes des coordonnées dans une base orthonormée de x et y alors $(x \mid y) = {}^tXY$.

Théorème.

orthonormalisation de Gramm-Shmidt

Soit $e_1, e_2, \ldots, e_p$ une famille LIBRE de vecteurs. Il existe une unique famille orthonormale $(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_p)$ telle que

- $\forall\, 1 \leq i \leq p,\ Vect(e_1, \ldots, e_i) = Vect(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i)$
- $\forall 1 \leq i \leq p (e_k \mid \epsilon_k) > 0.$

4.2.2 sev orthogonaux

Définition.

orthogonal d'une partie

Soit A une partie de E espace vectoriel préhilbertien. On note $A^\perp$ l'ensemble :

$$A^\perp = \{u \in E \mid \forall v \in A, (u \mid v) = 0\}$$

Théorème.

$A^\perp$ est une sous espace vectoriel fermé pour la norme associée au produit scalaire.

Propriété

$A \subset (A^\perp)^\perp$

Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.

Définition.

Deux sous espaces vectoriels F_1 et F_2 sont dits orthogonaux si :

$$\forall u \in F_1,\ \forall v \in F_2,\ (u \mid v) = 0.$$

Théorème.

On a les équivalences :

1) F et G sont orthogonaux
2) $F \subset G^\perp$
3) $G \subset F^\perp$

4.2.3 Supplémentaire orthogonal

Théorème :Nouveauté par rapport à la première année

Si F est un sous espace vectoriel de dimension finie alors :

$$E = F \oplus^\perp F^\perp$$

4.2.4 projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie...

Rappel : si $F \oplus G = E$ (1) alors, la projection sur F parallèlement à G est définie. mais l'égalité (1) est un prérequis. On a vu que même en dimension infinie, dès que F est un sev de dimension finie alors $F \oplus^\perp F^\perp = E$. Ce qui motive la définition suivante :

Définition.

Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie. On appelle projection orthogonale sur F, la projection orthogonale sur F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque : une projection orthogonale hérite des propriétés d'une projection.

Théorème :expression du projeté orthogonale sur F

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ une base orthonormale d'un sous espace F alors :

$$\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{k=1}^{m} (e_k \mid x) e_k.$$

Théorème.

Caractérisation métrique du projeté orthogonal

Soit F un sous espace vectoriel tel que Fet $F^{\perp}$ sont supplémentaires ;

$$\forall x \in E, \forall y \in F\ , \| x - y \| \geq \| x - p_F(x) \|$$

avec égalité si et seulement si $y = p_F(x)$.

Théorème.

$\forall x \in E\ d(x, F) = \| x - p_F(x) \|$

Théorème.

inégalité de Bessel

Si $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ est une famille orthonormale de vecteurs de E et F =Vect$(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ alors

$$\forall x \in E,\ \left\| p_F(x) \right\|^2 = \sum_{k=1}^{m} (e_k \mid x)^2 \leq \| x \|^2 .$$

4.2.5 exo banque

EXERCICE 76

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}\left([a,b], \mathbb{R}\right),\ \forall\, x \in [a,b]\ \ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt\ ,\ f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

EXERCICE 77

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Chapitre 5

Endomorphismes des espaces euclidiens

Dans tout ce chapitre $E, (.|.)$ désigne un espace vectoriel de dimension finie n.

5.1 Prérequis

• Expression du produit scalaire en base orthonormée. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est bon de E alors pour tout x, y éléments de E, si on note X et Y les matrices coordonnées colonnes de x et y dans $\mathcal{B}$ alors :

$$\phi(x, y) = X^T Y.$$

5.1.1 Ecriture d'un endomorphisme dans un base orthonormée.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base **orthonormée** de E alors si on note $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B}) = (a_{ij})$ on a

$$\forall i, j,\ a_{ij} = (u(e_j)|e_i).$$

5.1.2 changement des bases orthonormales

Théorème

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, deux bases orthonormales. Alors la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ vérifie $P^T = P^{-1}$; le changement de bases orthonormées s'écrit :

$$A' = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^T A P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

5.2 Adjoint d'un endomorphisme

5.2.1 Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien

On rappelle que la dimension des formes linéaires $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est égale à $\dim(E) = n$. On considère l'application suivante :

$$E \to \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \quad u \mapsto \big(v \mapsto (v|u)\big)\ .$$

On montre que cette application est injective, donc surjective on en déduite le théorème suivant :

Théorème des représentation des formes linéaires

$\forall \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que $\forall v \in E, \varphi(v) = (v|u)$.

application $E = \mathbb{R}^3$, et u_1, u_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ alors l'application $v \mapsto \det(u_1, u_2, v)$ est linéaire donc il existe un unique vecteur w appelé produit vectoriel de u_1 et u_2 tel que :

$$\forall v \ \det(u_1, u_2, v) = (u_1 \wedge u_2|v).$$

Exercice : Déduire les principales propriétés du produit vectoriel à partir de cette définition.

Adjoint d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ on définit l'adjoint de u, noté u^* par :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ (u(x)|y) = (x|u^*(y).$$

Justification L'application $\varphi_y : x \mapsto (u(x)|y)$ est une forme linéaire d'après le théorème de représentation il existe un unique z (qui dépend de x) tel que :

$$\forall x \in E \ (u(x)|y) = (x|z).$$

reste à montrer que l'application qui à y associe z est linéaire.

Propriétés de l'adjoint

$u \mapsto u^*$ est linéaire, c'est à dire $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, \ \left(\lambda u + v\right)^* = \lambda u^* + v^*$.

Et involutivité du passage à l'adjoint :

$$(u^*)^* = u.$$

Composition :

$$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*.$$

$rg(u) = rg(u^*)$, $det(u) = det(u^*)$, $Sp(u) = Sp(u^*)$.

Expression de l'adjoint en base orthonormée

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base **orthonormée** de E alors si on note $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B}) = (a_{ij})$ alors la matrice u^* dans cette base est A^T.

Un sauveur

Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*

5.3 Matrice orthogonale

Matrice orthogonale

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale si :

$$A^T A = I_n.$$

On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou encore $\mathcal{O}_n$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Premières propriétés

$\mathcal{O}_n$ est un sous-groupe multiplicatif de $GL_n(\mathbb{R})$.

$A \in \mathcal{O}_n$ si et seulement si les colonnes (ou les lignes) de la matrice sont orthonormées pour le produit scalaire usuel.

$A \in \mathcal{O}_n$ si et seulement si A est la matrice de passage d'un changement de bases orthonormés.

Définition

On dira que deux matrices A et B sont orthogonalement semblables s'il existe $P \in \mathcal{O}_n$ tel que :

$$A = P^T B P.$$

Orientation d'une espace euclidien : On décide qu'une base orthonormée est directe (une sorte de référence) alors une autre base orthonormée est directe si la matrice de passage de l'un à l'autre est de déterminant 1 sinon on dit qu'elle est indirecte. Le déterminant est alors invariant par changement de bases orthonormées directes.

5.4 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Définition

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle (ou endomorphisme orthogonal) si et seulement si :

$$\forall x \in E \;\; || u(x) ||=|| x || .$$

Théorème

u est une isométrie vectorielle si et seulement si u conserve le produit scalaire :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \; \big(u(x) \mid u(y)\big) = \big(x \mid y\big).$$

Théorème

u est une isométrie vectorielle si et seulement si il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que M =Mat$(u, \mathcal{B})$ vérifie $M^T = M^{-1}$ si et seulement si pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que M =Mat$(u, \mathcal{B})$ alors $M^T = M^{-1}$si et seulement si les colonnes de la matrice forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel si et seulement si $u^* = u^{-1}$.

5.4.1 Isométries vectorielles en dimension 2

Théorème

Si F est un sous-espace stable pour u une isométrie vectorielle alors $F^{\perp}$ est aussi stable.

le cas $n = 2$

Théorème

Soit $M \in \mathcal{O}_2$ alors :

si $\det(M) = 1$; M est la matrice d'une rotation d'angle θ et dans toute base orthonormée elle s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

si $\det(M) = -1$, M est la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite d'angle $\frac{\theta}{2}$

5.5 Réduction des isométries

Théorème

Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ alors il existe une base orthonormée de E telle que :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix},$$

où les matrices $R(\theta_i)$ sont des matrices de rotation.

(le cas $n = 3$)

Théorème

Soit $M \in \mathcal{SO}_3$ alors :

M est la matrice d'une rotation et grâce à une base orthonormée bien choisie on obtient

$$P^T M P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

5.6 Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

Définition

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme autoadjoint si $u^* = u$.

Théorème

$u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ \big(u(x) \mid y\big) = \big(x \mid u(y)\big).$$

On peut dire aussi symétrique au lieu de autoadjoint.

Notation : $\mathcal{S}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes autoadjoint de E, c'est un sous-esapce vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Théorème

u est un endomorphisme symétrique si et seulement si il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $M = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$ vérifie $M^T = M$ si et seulement si pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $M = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$ alors $M^T = M$

Le théorème suivant est au programme pour les équivalences (1) et (2) la démonstration est à connaitre.

Théorème

Soit p une projection. On a les trois assertions suivantes qui sont équivalentes :
(1) p est une projection orthogonale.
(2) p est autoadjoint.
(3) $\forall x \in E$, $\| p(x) \| \leq \| x \|$.

Théorème spectral ✠

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est autoadjoint si et seulement si E est somme orthogonale des sous espaces propres de u ou encore si et seulement si il existe une base orthonormale diagonalisant u.

Traduction matricielle du précédent

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthogonalement diagonalisable i.e :

$$\exists P \in O_n \ \text{ tel que } P^T M P = \ \text{Diag}\big(\lambda_1, \ldots, \lambda_r\big).$$

5.7 Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs ✠

Définition

On dit que $u \in \mathcal{S}(E)$ est endormorphisme autoadjoint positif si

$$\forall x \in E\ \big(u(x)|x)\big) \geq 0.$$

On dit que $u \in \mathcal{S}(E)$ est endormorphisme autoadjoint strictement positif si

$$\forall x \in E,\ \textbf{NON NUL}\ \big(u(x)|x\big) > 0.$$

Caractérisation spectrale des autoadjoint positif

$u \in \mathcal{S}(E)$ est positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset [0, +\infty[$.
$u \in \mathcal{S}(E)$ est strictement positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset]0, +\infty[$.

Même résultat pour les matrices symétriques, notations :

$$\mathcal{S}^+(E), \mathcal{S}^{++}(E), \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

5.8 Exercices banque ccp

5.8.1 74

1. On considre la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
2. On considére le systme différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
   En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

5.8.2 76

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ \ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\ ,\ f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

5.8.3 77

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

5.8.4 78

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.

(a) Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.

(b) Démontrer que u est bijectif.

2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

5.8.5 79

Soit a et b deux réels tels que $a¡b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.

2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose, $\forall\,(f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

5.8.6 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.

2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

5.8.7 81

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application $\varphi\left(A, A'\right) = \mathrm{tr}\left({}^tAA'\right)$, où $\mathrm{tr}\left({}^tAA'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.
On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.

3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

5.8.8 82

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $\left(A \mid A'\right) = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

5.8.9 92

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considére $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A\,, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble matrices symétriques de E et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^\perp$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^\perp$.

5.8.10 93

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, orienté par la base orthonormée (i, j, k).
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base (i, j, k) est $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Prouver que f est un endomorphisme orthogonal.
   (b) Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par f.
2. En déduire la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.

Deuxième partie

Analyse

Chapitre 6

De la bonne pratique du calcul local

Il est inutile de préciser qu'il est impossible de suivre le cours qui va suivre, si vous ne connaissez pas les dls des fonctions usuelles. Beaucoup (sauf tan et $\frac{1}{1-x}$) proviennent de la formule de Taylor-Young, ce qui permet de comprendre qu'il y a des ! dans le dl de exp mais pas dans celui du ln.

Tu composeras les Dls mais au voisinage des bonnes valeurs

Faire le dl de $\ln(\cos(x))$ au voisinage de 0 à l'ordre 2, en déduire $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$.

A l'aide d'un développement asymptotique, déterminer $\lim_{x\to 0} x\ln(\sin(x))$.

Pour faire un quotient tu utiliseras soit $\frac{1}{1-x}$ ou $\frac{1}{1+x}$ selon tes goûts

Retrouver le dl de la fonction tan à l'ordre 4 à l'aide d'un quotient.

Montrer que la fonction $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est continue et dérivable en 0.

Tu n'hésiteras pas à écrire $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)ln\big(f(x)\big)}$

Quel est l'ensemble de définition de $x \mapsto x^x$ et quelle est sa dérivée sur son ensemble de définition ?

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Si la limite n'est pas en 0, tu feras un changement de variable

Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\ln(x))}{1-x}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{\tan(2x)}$.

Tu ne dériveras pas un Dl sauf si la fonction a de la classe.....

Justifier que la fonction tan admet un dl à n'importe quel ordre et écrire celui-ci avec des coefficients indéterminés a_i (on sait que la fonction est impaire donc pas de termes pairs dans son Dl.)

Justifier que le Dl de la dérivée de tan s'obtient par dérivation du précédent. En utilisant $\tan' = 1 + \tan^2$ et l'unicité des DLS retrouver quelques termes du Dl de tan.

Tu as le droit d'intégrer un Dl sans oublier la constante d'intégration.

Redonner le Dl à l'ordre 2 de Arccos(x) au voisinage de 0 puis de l'arctan.

Déterminer un dl à l'odre 2 de la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t$.

Tu n'additionneras ni ne composeras les équivalents

Déterminer $\lim_{x\to+\infty} e^x - e^{x+\sqrt{x}}$.

Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x+\sqrt{(x)}}}{e^{x+\ln(x)}}$.

Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\ln(x+\sqrt{x})}$.

Quand on ne peut pas faire de Dl on utilise les croissances comparées.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{2023}}{(1+\frac{1}{2023})^x}$.

Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-\sqrt{x}} = 0$. Donner un exemple de fonction f qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et cependant telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-f(x)} = +\infty$

☞Les exemples précédents montrent que même si $e^{-\sqrt{x}} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ est vrai (et il est important d'en avoir la conviction), on ne peut pas se contenter de dire par croissance comparée.

Les dls sont efficaces dans beaucoup de situations

Soit f une fonction dont la courbe représentative admet la droite $y = x$ comme tangente en 0.
Montrer que $\lim\limits_{x\to0} \ln(x)(f(x) - x) = 0$

En vrac : revenir vers moi si vous ne trouvez pas comme votre voisin

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(1+\cos x)-2\tan x}{2x-\sin x-\tan x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} x(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\mathrm{Arcsin}^2 x})$.
3. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(\sin x)^4}(\sin\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{\sin x}{1-\sin x})$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(1-\cos x)\sin x - x^3\sqrt[4]{1-x^2}}{\sin^5 - x^5}$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+ax^2+2}-\sqrt[3]{x^3+1})^x$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} x((1+\dfrac{2}{x})^x-(1+\dfrac{1}{x})^{2x})$.
8. $\lim\limits_{x\to 1} x(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})})$.

Chapitre 7

Intégration sur un intervalle quelconque.

7.1 Intégrale convergente sur $[a, +\infty[$

Definition

Soit f une fonction continue par morceaux définie sur $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$; on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge , si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite FINIE en $+\infty$. Si c'est le cas , cette limite est notée $\int_a^{+\infty}$.

Théorème

L'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$ dont l'intégrale sur $[a, +\infty[$ converge est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. L'application de cet espace dans $\mathbb{K}$ qui à f associe $\int_a^{+\infty}$ est linéaire.

Conseil de rédaction

Un exercice sur les intégrales impropres commencera toujours par :

> La fonction *ici indiqué le nom ou l'expression de la fonction* est continue par morceaux sur l'intervalle ....

• On traite ici l'exemple fondamental des fonctions de Riemann, ce résultat n'est pas à redémontrer mais au contraire sert de référence pour les théorèmes de comparaison.

On sait calculer une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$:

$$\int_1^X \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t = \begin{cases} \ln(X) \text{ si } \alpha = 1 \\ \left[\dfrac{1}{1-\alpha} \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^X \end{cases}$$

Cette dernière expression admet une limite FINIE quand X tend vers $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

NEW Les fonctions exponentielles sont aussi des fonctions de références pour lesquelles il est inutile de justifier .

$t \mapsto e^{-at}$(où a est réel attention) est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $a > 0$.

intégrales de Riemann

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est convergente en $+\infty$ (et donc intégrale voir plus loin) si et seulement si $\alpha > 1$.

Certains résultats sur les intégrales sur un segment se généralisent, la relation de Chasles (pas détaillée ici) ici et les 2 théorèmes suivants. Signalons que si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge alors on peut définir $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt$ pour tout $x \in [a, +\infty[$. La fonction ainsi définie s'appelle le reste de l'intégrale convergente.

Généralisation de deux théorèmes

a) Soit f une fonction continue par morceaux définie sur $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ positive. On suppose que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \geq 0$$

de plus si f est CONTINUE et positive et si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et est nulle alors $f = 0$.

b) Le théorème fondamental de l'analyse.

Soit f une fonction continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge. La fonction de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$: $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt$ est dérivable sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée est $(-f)$ sur cet intervalle.

7.2 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Definition

Soit f une fonction continue par morceaux de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$. On dit f est intégrable sur $[a, +\infty[$, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} | f |$ est convergente.

☞Dans le cas des fonctions positives il n'y pas de différence entre intégrable et intégrale convergente. On peut également dire absolument convergente au lieu d'intégrable. Il y a évidement (sinon on ne ferait pas la différence de vocabulaire) des fonctions convergentes en $+\infty$ mais pas absolument convergente. En revanche, on a (comme dans le cas des séries) le théorème suivant

Proposition

Si une fonction f est intégrable sur $[a, +\infty[$ alors l'intégrable $\int_a^{+\infty}$ converge. Toute intégrable absolument convergente est convergente. On définit alors la valeur de $\int_I f$ à partir des parties réelles et imaginaires , dans la pratique jamais utilisé sauf pour la primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t-a}$ (a complexe).

.

☞ Si f est positive alors $x \mapsto \int_a^x f$ est croissante, celle-ci admet donc une limite si et seulement si elle est majorée. Cette remarque ne vaut pas le statut de théorème mais elle est la base des résultats qui suivent.

Théorème de comparaison.

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- Si $f \underset{+\infty}{=} O(g)$ alors l'intégrabilité de g implique celle de f.
- Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$ l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ équivaut à celle de f

☞Le lecteur attentif pourrait être surpris de l'absence d'hypothèses de positivité des fonctions comme dans le cas des séries : mais cette hypothèse est dans *intégrable* . Il est à noter que l'erreur est moins courante que dans le cas des séries à termes positifs. Car il n'a pas au programme d'équivalent au théorème spécial des séries alternées.

Conseil de rédaction

Un exemple :

Montrons que $t \mapsto \dfrac{e^{it}}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. On sait que :

$\left|\dfrac{e^{it}}{t^2}\right| = \dfrac{1}{t^2}$ en effet $|\, e^{it} \,| = 1$ or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est référencée intégrable donc $t \mapsto \dfrac{e^{it}}{t^2}$

est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Si on joint les résultats sur les intégrales de Riemann et le théorème de comparaison, on obtient la règle suivante. Mais attention celle-ci n'est pas explicitement au programme, donc écrire une relation à l'aide d'un petit o ou un grand O. De plus le point clef, quelque soit la rédaction, reste la même : les comparaisons entre fonctions usuelles vues en première année.

Règle t^α.

S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = l$ ($l \neq \infty$) alors f est intégrable sur $[c, +\infty[$.

Exercice Type : les Bertrands faciles

Montrer que $t \mapsto \frac{\ln(t)^3}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)^3}{t^2}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$. De plus

> Méthode 1 : je cherche $\alpha > 1$ tel que que $\frac{t^\alpha \ln(t)^3}{t^2}$ tende vers une valeur finie (souvent 0), or $t^{\alpha-2}\ln(t)^3$ tend vers 0 par exemple pour $\alpha = 1,5$ par comparaison des fonctions puissances et logarithme.
> Méthode 2 : on écrit directement le petit o
> Or $\frac{\ln(t)^3}{t^2} \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{t^{1,5}})$ (par comparaison des fonctions puissances et logarithme), or $t \mapsto \frac{1}{t^{1,5}}$ est référencée intégrable en $+\infty$, donc l'intégrande est également intégrable en $+\infty$.

Refaire l'exercice précédent pour $\frac{\ln(t)^3}{t^{1,2}}$ puis pour $\frac{\ln(t)^c}{t^b}$ où $b > 1$.

7.3 Généralisation

Definition

Soit f une fonction continue par morceaux de $[a, b[$ dans $\mathbb{K}$. On dit f est intégrable sur $[a, b[$, si l'intégrale $\int_a^b \mid f \mid$ est convergente.

Conseils pour aborder un exercice d'intégrale impropre

• Il faut étudier d'abord le domaine de définition de l'intégrande. Le programme officiel nous indique que les problèmes de définition sont aux bornes de l'intervalle d'extrémités a et b pour $\int_a^b$. Mais il se pourrait (des exercices un peu anciens) qu'il y ait également un problème pour une valeur intermédiaire (typiquement 1 pour $]0, +\infty[$) auquel cas il y a aurait trois études locales.
• Ne pas faire d'étude locale en 0 si la fonction est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
• Attention aux paramètres , un exemple $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2} dt$ sur $]0, +\infty[$, x a a priori le droit d'être négatif donc il y a potentiellement un problème en 0.
• Il y a toujours une étude à faire en $+\infty$.

théorème d'intégrations par parties sur un domaine ouvert

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $(a, b) \in \bar{I}^2 \subset \bar{\mathbb{R}}$. L'existence de limite aux bornes de l'intervalle du produit fg assure que les intégrales fg' et $f'g$ sont de même nature.

théorème de changement de variables

Soit $\phi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et soit f CONTINUE sur $]a, b[$, les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)du$ sont de même nature et égales en cas de convergences.

☞ le programme dit les étudiants peuvent appliquer sans justification dans les cas des changements de variables usuels.

⚠Ces deux derniers théorèmes permettent de démontrer qu'une intégrale est convergente, pour démontrer l'intégrabilité il faudrait dériver des fonctions $\mid f \mid$ ce qui est illusoire . Evidement, dans le cas des fonctions POSITVES, on obtiendra l'intégrabilité.

7.4 Exercices de la banque.

Exercice 28

N.B : les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Exercice 26

N.B : détermination de la limite = chap suites de fonctions. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} \mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.
3. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

On peut aisément généraliser les intégrales de Riemman , le nouveau programme propose cette formulation

Riemman le retour

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale de Riemman $\displaystyle\int_{]a,b]} \frac{1}{\mid x-a \mid^{\alpha}} \mathrm{d}x$ est intégrable si et seulement si $\alpha < 1$.

Remarque : on voit donc que $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est ni intégrale en 0 ni intégrable en $+\infty$, en revanche $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 mais pas en $+\infty$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ n'est pas intégrale en 0 mais intégrable en $+\infty$,
Les théorèmes de comparaison s'adapte à une étude locale en $a \in \mathbb{R}$.

7.5 Intégration des relations de comparaison.

Des exemples pour comprendre l'énoncé du théorème. On a

$$\frac{1+cos(t)+\frac{1}{t}}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{t^2}\Big).$$

Les deux fonctions sont intégrables en $+\infty$, donc $\displaystyle\int_1^x \frac{1+cos(t)+\frac{1}{t}}{t^2}\mathrm{d}t$ tend vers une valeur finie, disons l_1 (en fait $l_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+cos(t)+\frac{1}{t}}{t^2}\mathrm{d}t$) et $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ tend vers $l_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = 1$. On ne peut rien dire (en termes de $0, o, \sim$) entre ces deux réels. Cependant les deux restes tendent vers 0 (comme tout bon reste qui se respecte) donc on peut comparer (c'est le théorème qui suit) les restes :

$$\int_x^{+\infty} \frac{1+cos(t)+\frac{1}{t}}{t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} O\Big(\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t\Big) = O(\frac{1}{x})$$

Dans le cas divergent, on peut comparer des grandeurs qui tendent vers $+\infty$ (car cette section s'applique aux fonctions positives). Par exemple $\frac{1+\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \underset{+\infty}{=} O(\frac{1}{t})$. Or $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ donc

$$\int_1^x \frac{1+\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{t}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} O(\int_1^x \frac{1}{t}) = O(\ln(x))$$

.

Remarque 1 il se pourrait que l'intégrale de gauche soit convergente, le résultat serait vrai mais sans aucun intérêt.

Remarque 2 : dans cet exemple on peut se passer du théorème en majorant globalement $\mid 1+\sin\left(\frac{1}{t}\right) \mid$ par 2 et en intégrant les inégalités.

Intégration des relations de comparaison.

Soit a et b des éléments de $\bar{\mathbb{R}}$ où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Soit $f : [a,b[\to \mathbb{C}$ et g une fonction réelle de signe constant. Toutes les deux sont supposées continues par morceaux.

On suppose que quand x tend vers b

$f(x) = O(g(x))$ (resp1 $f(x) = o(g(x))$, resp2 $f(x) \sim g(x)$

Premier cas : On suppose que $\int_a^b g(x)dx$ converge alors $\int_a^b f(x)dx$ converge (déjà vu) et

$$\int_x^b f(t)dt \underset{x\to b}{=} O(\int_x^b g(t)dt),$$

$$\text{resp1} \quad \int_x^b f(t)dt \underset{x\to b}{=} o(\int_x^b g(t))dt$$

$$\text{resp2} \int_x^b f(t)dt \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)dt.$$

Deuxième cas : On suppose que $\int_a^b g(x)dx$ diverge alors

$$\int_a^x f(t)dt \underset{x\to b}{=} O(\int_a^x g(t)dt),$$

$$\text{resp1} \quad \int_a^x f(t)dt \underset{x\to b}{=} o(\int_a^x g(t))dt$$

$$\text{resp2} \int_a^x f(t)dt \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)dt.$$

Chapitre 8

Compléments sur les Séries Numériques

8.1 Rappels

8.1.1 Suites récurrentes

On démarre du résultat suivant conséquence de l'axiome de la borne supérieure

Théorème de convergence monotone

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, croissante et majorée alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l

Application aux les suites récurrentes

Les suites définies par : $u_{n+1} = f(u_n)$ doivent pouvoir être étudiées rapidement.

Plan d'étude-vocabulaire associé

• La fonction f s'appelle l'itératrice.

• Il faut trouver un intervalle I tel que $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$: I est intervalle stable pour f.

• On étudie les propriétés de f SUR I. Si f est croissante alors la suite est MONOTONE. Si f est décroissante, alors on étudie les deux suites extraites : u_{2n} et u_{2n+1}.

• On cherche les valeurs possibles d'une éventuelle limite en résolvant : $f(l) = l$: la justification est la continuité de f.

• On étudie également $x \mapsto f(x) - x$ qui permet d'obtenir la monotonie de la suite par récurrence.

• Le cas des fonctions f k-contractantes est classique, on rappelle ici seulement la définition.

Définition

f est dite k-contractante sur I si f est k-lipschitienne sur I où $0 \leq k < 1$, c'est à dire :

$$\exists k \in [0,1[,\ \forall x, y \in I \mid f(x) - f(y) \mid \leq k \mid x - y \mid .$$

8.1.2 EXERCICE 43 analyse

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).

   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan}\, x)$.

8.1.3 La règle de D'Alembert

☞ Attention cette règle ne permet de démontrer que l'absolue convergence et ne pas oublier l'hypothèse : termes non nuls (on étudie un quotient)

☞ C'est un outil de comparaison très grossier, le terme général de la série est finalement un $o(\frac{1}{n^\alpha})$ pour $\alpha > 1$ pas facile à déterminer (d'où l'intérêt de la règle) mais donc on a une convergence géométrique.

☞ On utilise la règle surtout que le terme général a une forme très multiplicative.

Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série **à termes non nuls** on suppose que

$$|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \to l \in \mathbb{R}^+ \bigcup \{+\infty\}$$

- Si $l > 1$ alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement .
- Si $l < 1$ alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente.
- Si $l = 1$ on ne peut pas conclure!!!!!!

REMARQUES

• Il n'y a pas non plus de réciproque à la règle de D'alembert, une série peut converger sans même que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admette une limite.

• Ce théorème fait l'objet d'un exo ccinp le 6.

spécial des séries alternées

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série alternée. Si la suite $|u_n|$ est décroissante et si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

Bonus : Le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

• Ce théorème fait l'objet d'un exo ccinp le 8

8.2 Etude pratique des séries de signe variable

utilisation d'un DA à deux termes

Exemple : étudier $\sum_{n\geq 1} ln\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$.

8.3 Formule d'Euler et de Stirling

8.3.1 Lien suites et séries

(sup) La série $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1} - u_n)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.

8.3.2 deux applications

Formule D'Euler

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Formule de Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$$

8.4 Comparaison séries intégrales

Les deux théorèmes suivants sont des méthodes , donc vous ne pouvez (plus pour les 5/2) les utiliser directement mais vous devez refaire la démonstration à chaque fois

Soit $f : [n_0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive et décroissante. On note $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$. Alors la suite $w_n = S_n - \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{dt}$ converge dans $\mathbb{R}_+$

ou

Soit $f : [n_0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive et décroissante, la série de terme général $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\mathbf{d}t - f(n)$ est convergente.

ou

Soit $f : [n_0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive et décroissante alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale impropre $\int_0^{\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

exercice le plus classique du monde Redémontrer la convergence des séries de Riemann à l'aide des intégrales de Riemann.

8.5 Sommation des relations de comparaison

Le cas des séries convergentes.

Soient $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série numérique **à termes positifs** convergente :

- Si $u_n = o(v_n)$ alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k)$.
- Si $u_n = 0(v_n)$ alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k)$.
- Si $u_n \sim (v_n)$ alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim (\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k)$.

(on peut comparer les restes dans le cas de la convergence.)

Le cas des séries divergentes.

Soient $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série numérique **à termes positifs** divergente :

- Si $u_n = o(v_n)$ alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = o(\sum_{k=0}^{n} v_k)$.

- Si $u_n = 0(v_n)$ alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = 0(\sum_{k=0}^{n} v_k)$.
- Si $u_n \sim (v_n)$ alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim (\sum_{k=0}^{n} v_k)$.

On peut comparer les sommes dans le cas de la divergence. Il faut être capable de donner des équivalents dans le cas "Riemann".

Les théorèmes de Césaro

Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite à termes positifs convergente vers l alors $\frac{u_1+u_2+\dots u_n}{n}$ converge vers l.

Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite à termes positifs divergente vers $+\infty$ alors $\frac{u_1+u_2+\dots u_n}{n}$ diverge aussi vers $+\infty$.

remarques J'ai mis l'hypothèse suite à termes positifs mais ce n'est pas vraiment utile, mais le programme propose ce th dans le cadre du chapitre sur la sommation des relations de comparaison.

8.6 famille sommable

Le programme de première année a changé : les familles sommables sont au programme de première année mais avec un changement subtil : dans le cadre des familles à termes positifs, un calcul d'une somme obtenant un résultat fini justifie a posteriori le caractère sommable. On peut donc manipuler $\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij}$ avant d'avoir justifié son caractère fini.

8.6.1 Cas des réels positifs

(I désigne un ensemble au plus dénombrable)

Somme d'une famille de TERMES POSITIFS

On définit la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ par

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup_{J \text{ fini}} \sum_{n\in J} u_n \in [0,+\infty]$$

On dit que la famille est sommable si $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.

permutation des termes d'une série à termes positifs.

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et σ une permutation de $\mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$$

☞, On peut donc par exemple regrouper les termes pairs et impairs pour étudier une série à termes positifs. Si la somme est finie, on obtient la bonne somme.

$(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} = q^{|n|}$ où $q \in [0,1]$, calculer sa somme.

théorème de sommation par paquets (y compris le cas=$+\infty$ ✠)

Si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels POSITIFS alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{i\in I_n} u_i).$$

théorème de Fubini ✠

Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une famille de nombres réels positifs on a

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$$

☞Pour les 5/2, plus besoin de phrase sous réserve d'existence, on travaille avec des sommes éventuellement égale à $+\infty$.

8.6.2 Cas des complexes

Définition

On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{C}^I$ est sommable si $\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$.

On définit alors la somme à partie des parties réelles et imaginaires mais je ne veux même pas écrire de formule : le nouveau programme invite à faire un calcul formel que l'on justifie dans un second temps.

Les théorèmes d'invariance par permutation, sommation par paquets et de Fubini se généralisent avec l'hypothèse : $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{C}^I$ est sommable.

Théorème de domination

S'il existe une famille sommable de réels positifs $(v_i)_{i\in I}$ telle que

$$\forall i \in I \mid u_i \mid \leq v_i$$

alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

Produit de Cauchy

Définition

On appelle produit de Cauchy des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Théorème

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergentes alors la famille $(u_p v_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est sommable et

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} u_p v_q = (\sum_{p=0}^{+\infty} u_p)(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

où w_n est le terme général du produit de Cauchy

exercice cours programme de colle $e^{x+y} = e^x e^y$

Chapitre 9

Suites et séries de fonctions

9.0.1 Suite de fonctions

9.0.2 Convergence simple

Remarque sur le programme

Les fonctions considérées ont pour ensemble de départ un espace vectoriel normé de dimension finie noté (E, N), pour tous les exercices traités E sera égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et la norme est donc le module noté $|\ .\ |$. Pour ne pas écrire deux fois le cours les définitions sont données dans le cadre du programme pour l'ensemble de départ. De plus, l'ensemble d'arrivée est F un espace vectoriel de dimension finie. Le programme incite à considérer d'abord le cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, c'est ce qui est fait ici. La généralisation ne sera vue que dans le cas des suites de fonctions matricielles plus tard dans l'année.

Définition 1

Soit (E, N) un espaces vectoriel normé de dimensions finies et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. On appelle **suite de fonctions sur** A, toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n : A \mapsto \mathbb{K}$

Définition 2

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A.

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** A si et seulement si pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite dans $\mathbb{K}$ que l'on note $f(x)$.

La fonction $f : A \mapsto \mathbb{K}$ ainsi définie est appelée la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $f_n \xrightarrow{S} f$ sur A.

La suite des exemples est à traiter chez soi ou en classe selon l'avancement du cours. La rédaction est toujours la même.

Conseil de rédaction

Fixons $x \in A$,(A est une partie de $\mathbb{R}$ où les f_n sont définies), on étudie la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ à l'aide des outils sur les suites. En particulier, on discute des formes indéterminées.

Un exemple rédigé :

Ex + rédaction

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on définit $f_n(x) = nx^n$, étudiez la convergence simple de la suite de fonctions f_n.

Fixons $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mid x \mid < 1$, alors les comparaisons usuelles entre suite géométrique et suite polynomiale permet de conclure que $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers 0. En revanche si $\mid x \mid \geq 1$, $(f_n(x))_{n\geq 0}$ ne converge pas.

Exemple 1

On pose

$$u_n(x) = e^{-nx}\sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0, +\infty[$.

Exemple 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = x^n \ln x \text{ avec } x \in]0, 1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ sur $[0, 1]$.

Exemple 3

Etudier la convergence simple de $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1 + x^n)}$$

Exemple 4

Pour $x \in [0, \pi/2]$, on pose $f_n(x) = n\sin x \cos^n x$.
Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n).

Exemple 5 avec un paramètre

Pour quelles valeurs de α la suite de fonctions $f_n(x) = x(1 + n^\alpha \mathrm{e}^{-nx})$ définies sur $\mathbb{R}^+$ converge-t-elle simplement vers une fonction f à déterminer.

Exemple 6 fonctions définies par morceaux

Soit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^2 x(1 - nx) \text{ si } x \in [0, 1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

Etudier la convergence simple de la suite (f_n).

Exemple 7 fonctions définies par morceaux

Etudier la convergence simple de la suite de fonctions f_n définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq n \\ n \text{ si } x > n \end{cases}$$

Exemple 8 très classique (telecom 2022

Etudier la convergence simple de la suite de fonctions f_n définies par :

a)

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \geq n \\ (1 - \frac{x}{n})^n \text{ si } x < n \end{cases}$$

b) Pour les 5/2 Montrer que pour tout n, $\mid f_n(x) \mid \leq e^{-x}$

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n$.

Exemple 9 plus difficile

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$u_0(x) = x, \forall n \geq 0, \ u_{n+1}(x) = \frac{2\sqrt{u_n(x)}}{1 + u_n(x)}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers la fonction constante égale à 1.

Mes corrections/recherche

Exemple 1

Exemple 2

Exemple 3

Exemple 4

Exemple 5

Exemple 6

Exemple 7

Exemple 8

On peut se demander quelles propriétés sont conservées pas passage à la limite simple : celles qui font intervenir des inégalités larges :

Certains résultats à la limite du programme mais tous faciles

Si la suite $f_n \xrightarrow{S} f$ sur A et les fonctions f_n sont positives, négatives, paires, impaires, périodiques, croissantes, décroissantes, convexes, concaves alors il en est de même de la limite

Mais une limite simple de fonctions continues peut ne pas être continue, il suffit de considérer :

Contre exemple 1

Etudier la convergence simple de $f_n(x) = x^n$ définie sur $[0, 1]$.

Cela peut être encore plus embêtant :

Contre exemple 1

Que dire de la suite de fonctions f_n définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x \geq \frac{1}{n} \\ n \text{ sinon} \end{cases}$$

et de

$$g_n(x) = \begin{cases} E(\frac{1}{x}) \text{ si } x \geq \frac{1}{n} \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

En particulier expliquer pourquoi les g_n sont continues par morceaux.

9.0.3 Convergence uniforme

☞**Prérequis** Si f est fonction bornée, on peut définir la norme uniforme (voir chapitre norme) , elle est définie ainsi :

$$||f||_{\infty,A} = \text{Sup}_{x\in A} \mid f(x) \mid$$

où A est la partie de l'ensemble de définition de f qui nous intéresse. En mP2, il est obligatoire d'écrire une norme infinie pour démontrer la convergence uniforme.

Définition 1 : inutilisable

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et $f : A \mapsto F$.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** A vers f si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall n \geq N, \ || \ f_n(x) - f(x) \ ||\leq \epsilon.$$

Il faut comprendre qu'il y a une inversion de quantificateurs : le N est universel pour tous les x. La définitions de converge simplement sur A et pour tout $x \in A$ il y a convergence de $(f_n(x))_{n\geq 0}$:

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in A, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \ || \ f_n(x) - f(x) \ ||\leq \epsilon.$$

On préfère utiliser la norme uniforme (et ainsi interpréter certains résultats en terme de densité)

Définition 2= théorème

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f si et seulement si
1) il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0,\ f_n - f$ est bornée sur A.
2) $|| f_n - f ||_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On note alors $f_n \overset{U}{\not\to} f$ sur A.

On ne détaille que très rarement de 1) car $n_0 = 1$ ou 0 dans les exercices et on démontre en même temps borné et le 2).

la convergence uniforme (sur A) implique la convergence simple (sur A).

Comment étudier la convergence uniforme ?

• Méthode 1 : on étudie d'abord la convergence simple puis la fonction différence par dérivation. Cette méthode a l'avantage de permettre de démontrer cvu et non cvu.

exemple Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = x^n \ln x \text{ avec } x \in]0,1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ sur $]0,1]$.

Exemple 1

Etudier la convergence uniforme de $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$$

Exemple 2

Etudier la convergence uniforme de la suite des $f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$ définies sur $\mathbb{R}^+$

Exemple 3

Etudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) donnée par

$$f_n(x) = \sin^n(x)\cos(x)$$

Pour l'étude de la fonction, faire intervenir un arccos (plutôt qu'un arctan) pour le maximum.

Exemple 4

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$$

1. Etudier la limite simple de la suite (f_n).
2. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, y a-t-il convergence uniforme ?

Comment étudier la convergence uniforme ?

• Méthode 2 : on ne calcule pas explicitement la norme uniforme mais on majore celle-ci par une suite qui converge vers 0.
On peut écrire un théorème mais ce n'est pas obligatoire :

Si la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur A et s'il existe une suite α_n qui converge vers
0 telle que :

$$\forall t \in A \mid\mid f_n(t) - f(t) \mid\mid \leq \alpha_n$$

alors la suite des f_n converge uniformément vers f.
Démonstration en effet :

$$\mid\mid f_n - f \mid\mid_\infty \leq \alpha_n.$$

Soit $f_n(t) = \dfrac{t+n}{n(1+t^2)}$ définie pour $t \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence simple puis la convergence uniforme (on pourra utiliser $\mid ab \mid \leq a^2 + b^2$
remarque : l'exemple précédent peut également être traité par une étude de fonction.

Comment démontrer qu'il n'y a pas convergence uniforme

Le résultat suivant n'est pas explicitement au programme et fait l'objet d'une question exo ccp...mais l'argument est très facile si on veut bien utiliser la norme infinie

Si la suite f_n converge simplement vers f et il existe u_n une suite d'éléments de l'ensemble de définition des f_n telle que
$f_n(u_n) - f(u_n)$ ne converge pas vers 0 alors il n'y pas convergence uniforme.

démonstration

$$|| f_n - f ||\geq | f_n(u_n) - f(u_n) |$$

⚠Attention pas de généralisation dans le cas de l'étude des séries.

Comment démontrer qu'il n'y a pas convergence uniforme

On contredit la conclusion d'un théorème du paragraphe suivant en prenant soin de vérifier toutes les hypothèses sauf celle de cvu

9.1 Séries de fonctions

Préambule

On pourrait se contenter de dire revenir toujours à la définition par les sommes partielles mais les choses sont un peu plus compliquées que cela, cependant ne pas oublier que dans certains cas le passage par les sommes partielles est une idée (voir question d'un exercice ccinp)

9.1.1 convergence simple

Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A.

On dit que **la série** $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** A si et seulement si pour tout $x \in A$, la série $(\sum f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F. Dans ce cas on note $S(x)$ la somme de la série $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}(x)$

Th : Condition nécessaire

Si la série $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement alors $f_n \not\to 0$ sur A.

Démonstration C'est une simple application du théorème sur les séries numériques ou on redonne l'argument :

$$\forall n \geq 1, u_n = S_n - S_{n-1}$$

puis passage à la limite.

☞ Comme dans le cas des suites de fonctions , la convergence simple est un exercice sur les séries numériques (le plus souvent sauf exp de matrices), on peut donc utiliser les outils de ce chapitre : équivalent , tssa...

Exemple 1 ça passe facile

Etudier la convergence simple de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2} \text{ avec } n \geqslant 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

exemple 2 : tssa épisode 1

Etudier la convergence simple, de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2} \text{ avec } n \geqslant 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

exemple 3 : le retour

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n : x \in [0,1] \mapsto n^\alpha x^n (1-x) \in \mathbb{R}.$$

Etudier la convergence de la suite de fonctions (u_n), puis la convergence simple la série de fonctions $\sum u_n$.

exemple 4

On considère la série des fonctions

$$f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

définies sur $\mathbb{R}^+$.
Etudier sa convergence simple.

exemple 5

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = a_n x^n (1-x) \text{ avec } x \in [0,1]$$

Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.

Exemple 1

Exemple 2

Exemple 3

Exemple 4

Exemple 5

9.1.2 convergence uniforme, convergence normale

Convergence uniforme d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A.

On dit que **la série** $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** A si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A.

Théorème

1) Si la série $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A alors elle converge simplement.

2) Si la série $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A alors $f_n \not\xrightarrow{U} 0$ sur A.

3) La série $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A si et seulement si elle converge simplement sur A vers S et la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur A

Convergence normale

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A.

On dit que **la série $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur** A si et seulement si

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur A.

2) la série $(\sum_{n\geq 0} || f_n ||_\infty^F)$ converge dans $\mathbb{R}$.

Remarque : la norme infinie s'entend comme le $\text{Sup}_{x\in A} || f(x) ||^F$ pour x dans l'ensemble de définition. Dans tous les exercices (sauf exponentielle de matrices), f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème

1) Si la série $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur A alors elle converge uniformément et donc simplement sur A.

2) Si la série $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur A alors la série de fonctions $(\sum || f_n ||^F)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément et simplement sur A.

3) Si la série $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur A alors $f_n \not\rightrightarrows 0$ sur A.

Remarque 1 : le cas b) se traduit dans le cas d'une suite de fonctions numériques par la convergence normale implique la convergence absolue. Attention : la convergence uniforme n'implique pas la convergence absolue , il suffit de considérer un exercice où l'on a fait usage du tssa.

Remarque 2 : la démonstration sera faite plus tard et à mon humble avis n'apporte pas grand chose à la compréhension du théorème.

☞ Reprendre les exemples 1,2,3,4 et étudier les différents types de convergence.

Exemple 6

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = a_n x^n(1-x) \text{ avec } x \in [0,1]$$

a) Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.

b) Montrer que cette série converge normalement si, et seulement si, il y a convergence de la série $\sum a_n/n$.

c) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément si, et seulement si, $a_n \to 0$.

9.2 Conservation des propriétés par passage à la limite

9.2.1 Conservation de la continuité

version suite

Soit $a \in X$. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur X vers f, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a alors f est continue en a. En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues est continue

☞ : je recopie ici le programme officiel : le théorème s'applique dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite de façon locale, en particulier sur tout segment. En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.

version séries

Si $\sum f_n$ converge uniformément sur X vers S , et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a alors la série S est conitnue en a.

Remarque On utilise beaucoup plus souvent le théorème dans le cas des séries, car S est souvent inconnue mais existe par théorème de comparaison. En revanche, pour une suite de fonctions la limite est souvent connue quand celle-ci existe.

9.2.2 Conservation de la limite

Les théorèmes suivants sont plus forts que les précédents (on pourrait voir les précédents comme des corollaires). Cependant, bien que les démonstrations soient hors programme, il est beaucoup plus facile de démontrer les premiers (car le candidat limite est connue $(f(a))$ alors que la version limite nécessite l'utilisation d'un argument de compacité). Les théorèmes qui suivent s'appliquent en particulier pour des limite en $+\infty$.

Théorème de la double limite.

• version suites : soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n, u_n admet une limite l_n en a, alors $(l_n)_{n\geq 0}$ admet une limite l et $\lim\limits_{x\to a} u(x) = l$.

• version séries :soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers S sur A, et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n, u_n admet une limite l_n en a, alors $\sum\limits_{n\geq 0} l_n$ converge vers l et $\lim\limits_{x\to a} S(x) = l$.

9.2.3 intégration, primitivation

Théorème le plus facile de l'année.

Soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions telles que
i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$ (et donc intégrale)
ii) $f_n \overset{U}{\not\to} f$
alors la fonction f est continue (on le sait déjà) et la suite $\int_a^b f_n$ converge et

$$\int_a^b f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_a^b f(t)dt.$$

Le théorème précédent s'applique aux séries : on peut inverser $\sum$ et $\int$ sous les deux hypothèses de convergence uniforme et l'intervalle d'intégration est un segment. Le programme propose une autre version de ce théorème mais c'est fondamentalement le même. Attention à ne pas appliquer l'un ou l'autre des formulations dans le cas d'une intégrale impropre.

Primitivation

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I.On suppose que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, soit

$$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$

Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I.

9.2.4 Dérivation

Le théorème suivant pour les suites est peu utilisé mais :

Dérivation

Soient I un intervalle non réduit à un point et (f_n) une suite de fonctions définie sur I telle que
i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$.
ii) La série (f_n) converge simplement sur I vers une fonction u.
iii) $(f_n') \overset{U}{\not\to} g$ sur tout segment de I.
alors (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction u de classe $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée est égale à $u' = g$

☞ L'hypothèse de convergence uniforme porte sur les dérivées car on applique en fait le théorème précédent aux f_n', mais alors on a besoin du théorème fondamental de l'analyse d'où l'hypothèse classe $\mathcal{C}^1$.

Dérivation terme à terme

Soient I un intervalle non réduit à un point et $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur I telle que

i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$.

ii) La série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une somme S.

iii) $\sum f_n' \xrightarrow{U} g$ sur tout segment de I vers une somme S'.

alors $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction S de classe $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée est égale à S'

Ce théorème se généralise à une dérivée p ième, le programme ne demande explicitement que de vérifier la convergence uniforme pour la p ième dérivée sur tout segment .

Dérivation p-ième terme à terme.

Soient I un intervalle non réduit à un point et $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur I telle que

i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^p$.

ii) Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$,la série $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement vers S_k sur I.

iii) $\sum f_n^{(p)} \xrightarrow{U} S_p$ sur tout segment de I.

alors $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction S de classe $\mathcal{C}^p$ et $S^{(p)} = S_p$

9.2.5 Exercices banque ccp.

Énoncé exercice 9

1. Soit X un ensemble, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
   Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
   (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a; +\infty[$?
   (d) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Énoncé exercice 10

On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

Énoncé exercice 11

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

   Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

Énoncé exercice 12

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.
2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0; 1]$, $g_n(x) = x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

Énoncé exercice 13

1. Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.
   On suppose que, pout tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g.
   Démontrer que la fonction g est bornée.
2. On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3 x & \text{si} \quad |x| \leqslant \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad |x| > \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

   Prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Énoncé exercice 14

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Énoncé exercice 15

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\displaystyle\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

Énoncé exercice 16

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculez $S'(1)$.

Énoncé exercice 17

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\Big(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\Big)$$
$$\Downarrow$$
$$\big(\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers 0 sur } A\big)$$

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0;+\infty[,\ f_n(x) = nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
   $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.

Énoncé exercice 18

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   (b) La fonction S est-elle continue sur D ?

Il y a deux exercices dans ccp où on a des séries dans des evn.

Énoncé Exercice 40

Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée ——— ———.
On suppose que $\forall (u,v) \in A^2,\ ||u.v|| \leqslant ||u||.||v||$.

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.
   (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
   (b) Démontrer que $(e-u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.
2. Démontrer que, pour tout u de A, la série $\displaystyle\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.

Énoncé Exercice 54

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. On pose $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $||u|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
   (a) Prouver que $||\,.||$ est une norme sur E.
   (b) Prouver que $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.
   (c) On pose alors $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.
   Prouver que f est continue sur E.

9.3 Approximations uniformes de fonctions continues.

Approximations uniformes de fonctions continues par des fonctions en escalier = sup.

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

Théorème de Weierstrass.

Toute fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

Un exercice ccp qui utilise ce résultat :

Énoncé exercice 48

$C^0([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0$.

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)_{n\in N}$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f^2.
   (b) Démontrer que $\int_0^1 f^2(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 P_n(t) f(t) dt$.
   (c) Calculer $\int_0^1 P_n(t) f(t)\,dt$.
3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0,1]$.

9.4 Quelques démonstrations.

Démontrer que toute série de fonctions normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X

Démonstration : Pour tout $x \in X$, $\mid f_n(x) \mid \leq \mid\mid f_n \mid\mid_\infty$ et $\left(\sum \mid\mid f_n \mid\mid_\infty\right)$ converge donc $\left(\sum f_n(x)\right)$ est absolument convergente donc convergente ce qui donne la convergence simple de la série sur X.

Puis

$$\forall x \in X, \mid \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \mid \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \mid f_k(x) \mid \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \mid\mid f_k \mid\mid_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mid\mid f_k \mid\mid_\infty$$

on fait tendre p vers ∞ ce qui est licite car toutes les sommes sont bornées

$$\forall x \in X, \mid \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \mid \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mid\mid f_k \mid\mid_\infty$$

c'est à dire

$$\forall x \in X, \mid\mid \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \mid\mid_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mid\mid f_k \mid\mid_\infty$$

donc $\mid\mid S - S_n \mid\mid_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mid\mid f_k \mid\mid_\infty$ converge vers 0.

d'où la convergence uniforme de la série

Montrer que la limite uniforme de fonctions continues en x_0 définies sur $[a, b]$ est continue en x_0. (sans le théorème de la double limite)

Démonstration : $\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, (f_n - f)$ est bornée sur $[a, b]$ et $\mid\mid f_n - f \mid\mid_\infty \leq \frac{\epsilon}{3}$

d'autre part (et c'est le point clef de la démonstration)

$$\forall x \mid f(x) - f(x_0) \mid \leq \mid f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0) \mid$$

$$\forall x \mid f(x) - f(x_0) \mid \leq \mid f(x) - f_{n_0}(x) \mid + \mid f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) \mid + \mid f_{n_0}(x_0) - f(x_0) \mid$$

$$\forall x \mid f(x) - f(x_0) \mid \leq \mid f - f_{n_0} \mid_\infty + \mid f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) \mid + \mid f_{n_0} - f \mid_\infty$$

or f_{n_0} est continue en x_0 donc $\exists \eta > 0, \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $\mid f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) \mid \leq \frac{\epsilon}{3}$

si on ramasse les morceaux on a démontré la continuité en x_0.

Déjà vu ancien ccp ...

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

Démontrer que la suite de fonctions ne tend pas uniformément vers f.

Démonstration : : (plus courte que l'énoncé)

Supposons $f_n - f$ bornée sur X sinon pas d'espoir de convergence uniforme . On a

$$\mid\mid f_n - f \mid\mid_\infty \geq \mid f_n(x_n) - f(x_n) \mid\mid$$

ne tend pas vers 0 donc pas de convergence uniforme.

encore un ancien ccp

Démontrez l'implication $\sum f_n$ converge uniformément vers sur A alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A.

Démonstration

Si on note comme d'habitude R_n le reste au rang n de la série , il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, R_n est borné sur A alors $\forall n \geq n_0 + 1$, $f_n = R_{n-1} - R_n$ est bornée et vérifie $|| f_n ||_\infty \leq || R_{n-1} ||_\infty || R_n ||_\infty$ converge vers 0.

Une démonstration du cours

Montrer que :

3) La série $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A si et seulement si elle converge simplement sur A vers S et la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur A

Démonstration :

Si la série $(\sum f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A alors elle converge simplement sur A donc (R_n) est bien définie sur A et $S_n \overset{U}{\not\to} S$ sur A . réciproquement , si elle converge simplement sur A vers S alors (R_n) est bien définie sur A et $(R_n) \overset{U}{\not\to} 0$ implique $(S - R_n) \overset{U}{\not\to} S$ sur A d'où le résultat car $S_n = S - R_n$

Des exercices exemplaires : :

1

On pose

$$f_n(x) = nx^2e^{-nx} \text{ avec } x \in \mathbb{R}^+$$

Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

2

Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

a) Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
b) Préciser le sens de variation de S.
c) Etablir

$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$

d) Donner un équivalent de S en 0.
e) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

3

Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

a) Quel est le domaine de définition de f ?
Etudier la continuité de f sur celui-ci.
b) Montrer que f est strictement décroissante.
c) Etudier la limite de f en $+\infty$.
d) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

9.5 Théorème de convergence dominée.

9.5.1 Les théorèmes

(rappel)

Si f est continue sur $[a,b]$ et $f_n \overset{U}{\to} f$ alors d'une part f est continue sur $[a,b]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f_n$.
(même théorème dans le cas des séries)

Théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Soit I un intervalle ,et $f_n : I \to \mathbb{K}$. On suppose :
(i) $\forall n, f_n \in \mathcal{C}^0_{mcx}(I,\mathbb{K})$.
(ii) $\exists \phi \in L^1(I,\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N} \mid f_n \mid \leq \phi$ (domination)
(iii) $f_n \overset{S}{\to} f$ sur I
iv) $f \in \mathcal{C}^0_{mcx}(I,\mathbb{K})$
alors
f est intégrable sur I et $\int_I f_n$ converge vers $\int_I f$.

9.6 Les théorèmes d'intégration termes à termes.

⚠ L'esprit du programme a changé en 2022 : comme pour les familles sommables, dans le cas des fonctions **à valeurs positives** on peut écrire les sommes infinies faire l'interversion et en déduire ou pas l'existence des sommes infinies.

Nouveauté 2022

Soit I un intervalle et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions vérifiant :
(i) $\forall n, f_n \in \mathcal{C}^0_{mcx}(I, \mathbb{R}^+)$
(ii) $\forall n, f_n$ est intégrable sur I
(iii) $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux .
alors on a l'égalité suivante dans $[0, +\infty]$

$$\int_I S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

Théorème d'intégration terme à terme.

Soit I un intervalle et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions vérifiant :
(i) $\forall n, f_n \in \mathcal{C}^0_{mcx}(I, \mathbb{K})$
(ii) $\forall n, f_n$ est intégrable sur I
(iii) $\sum \int_I | f_n |$ converge.
(iv) $\sum f_n$ converge simplement sur I.
(v) $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^0_{mcx}(I, \mathbb{K})$
alors S est intégrable sur I et $\int_I S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$
et $\int_I | S | \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I | f_n |$

9.6.1 exercice

1

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}\, dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

2

Etudier la limite éventuelle, quand n tend vers $+\infty$, de la suite

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{n+2}}\, \mathrm{d}x$$

3

Montrer que

$$u_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t^3)^n}$$

est définie pour $n \geqslant 1$.

Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$$

En déduire la nature de la série de terme général u_n.

4

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\text{sh x}}\,dx$ en écrivant cette intégrale comme somme d'une série.

5

Montrer que pour x réel de $[0,1[$, $-\ln(1-x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$.

6

Montrer que $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

Chapitre 10

Séries entières

Introduction

On s'intéresse ici à un certains type de séries de fonctions :
• les fonctions f_n sont des monômes : $z \to a_n z^n$.
• Les f_n sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et les a_n des complexes définis **pour tout** n.
• De nombreux résultats sont au programme mais pas tous : il faut bien connaître les démonstrations des théorèmes au programme pour s'en inspirer pour les sujets originaux.
• Il faut connaître parfaitement le cours sur les séries de fonctions.

10.1 Convergence d'une série entière.

10.1.1 Rayon de convergence

Lemme d'Abel.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$. Si la suite $a_n z_0^n$ est bornée, alors :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \text{tel que} \quad |\, z \,| < |\, z_0 \,|, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{est absolument convergente.}$$

Démonstration

Définition

On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ le nombre :

$$R = \text{Sup}\{r \geq 0 \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Caractérisation du rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Il existe un unique réel $R \in [0; +\infty[\bigcup\{+\infty\}$ tel que

- Si $\mid z_0 \mid < R$ alors $\sum a_n z_0^n$ converge absolument
- Si $\mid z_0 \mid > R$ alors $\sum a_n z_0^n$ diverge grossièrement.

ce réel est appelé le *rayon de convergence de la série entière.*

☞ Attention bien comprendre la phrase, le rayon est caractérisé par les 2 propriétés validées, on ne peut pas déterminer un rayon avec une seule inégalité (sauf si $R = 0$ ou $R = +\infty$)

Démonstration

Recherche de R par la règle de d'Alembert ✠

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $\exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geq p, \mathbf{a_n} \neq \mathbf{0}$ et

$$\text{Si } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\mapsto+\infty}{\longrightarrow} l \text{ alors } R = \frac{1}{l}.$$

Remarque : si $l = 0$ on obtient $R = +\infty$ et si $l = +\infty$ on obtient $R = 0$. Il est à noter que dans de très nombreux exemples on ne peut pas appliquer la règle de d'Alembert car la limite du quotient n'existe pas.

Exemples 1

- On définit $a_n =$ la n ième décimale de π (ou de e mais pas de γ). Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$?
- On définit $a_n = \sin(n)$. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$?

⚠ Le cas des séries entières qui ont une infinité de a_n qui sont nuls (par exemple les polynômes ou les séries entières qui n'ont que des termes pairs), il faut revenir à la règle de D'Alembert classique, en n'oubliant pas ni la valeur absolue ni $z \neq 0$.

EXERCICE 20

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Calculer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :
   (a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.
   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$

EXERCICE 21 analyse

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

Utilisation du Lemme d'Abel donc pas vraiment un théorème.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} 1) & \text{Si } \sum_{n\geq 0} a_n z_0^n & \text{converge alors} & |\, z_0 \,| \leq R \\ 2) & \text{Si } (a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}} & \text{est bornée} & |\, z_0 \,| \leq R \\ 3) & \text{Si } \sum_{n\geq 0} a_n z_0^n & \text{diverge alors} & |\, z_0 \,| \geq R \\ 4) & \text{Si } \sum_{n\geq 0} a_n z_0^n & \text{est semi-convergente} & |\, z_0 \,| = R \end{cases}$$

Comparaison des séries entières.

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b alors
1. Si $\forall n\,, |\, a_n \,| \leq |\, b_n \,|$ alors $R_a \geq R_b$.
2. Si $|\, a_n \,| \sim |\, b_n \,|$ alors $R_a = R_b$.

Fondamental

Une série entière de rayon $R > 0$ converge normalement (et donc uniformément) sur tout disque fermé de rayon $r < R$.

Démonstration

Très facile , soit $r < R$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C},$ tel que $|z| \leq r$, $\mid a_n z^n \mid \leq$

10.1.2 Propriétés algébriques des séries entières.

Somme de séries entières.

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b alors

$\sum (a_n + b_n) z^n$ admet pour rayon de convergence

$\begin{cases} R_{a+b} = inf(R_A, R_b) \text{ si } R_A \neq R_b \\ \quad R_{a+b} \geq R_a \text{ si } R_a = R_b \end{cases}$

Le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est 1

La démonstration fait l'objet d'un exercice de la banque ccinp.

EXERCICE 22 analyse

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon, la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? $x = -\frac{1}{2}$?.

Produit par une constante d'une série entière.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Alors

$$\sum \lambda a_n z^n = \lambda \sum a_n z^n$$

et $\sum \lambda a_n z^n$ admet pour rayon de convergence R.

Produit de Cauchy de deux séries entières.

Soit Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b alors si on note $R = \text{Min}(R_a, R_b)$,

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

où $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Démonstration

Conséquence.

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}.$$

Démonstration

Ouf que c'est au programme car difficile

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration

Continuité.

Soit $S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors

$$S \text{ est continue sur la disque ouvert de rayon } R.$$

Hors programme mais démonstration facile Si de plus, $\sum_{n\geq 0} \mid a_n \mid x^n$ converge en $x = R$, alors S est continue sur le disque fermé de rayon R.

Ce résultat n'est plus au programme, le cas où $\sum a_n x^n$ converge en $x = R$ est l'objet du théorème suivant bien plus délicat (cas où il n'y a pas absolue convergence).

10.2 Séries entières réelles.

Théorème de convergence radiale d'Abel .

Si $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\sum a_n R^n$ converge, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

Très important soyez attentifs les 5/2

Démontrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

Définitions.

1) Une série entière de la variable réelle x est une série de fonctions $\sum u_n$ où les fonctions u_n sont des monômes $a_n x^n$ où a_n est un nombre réel.

2) Le **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n x^n$ est celui de la série de la variable complexe z , l'intervalle ouvert de convergence est $]-R, R[$.

3) Le **domaine réel de convergence** est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sum a_n x^n$ converge .

Dérivation.

Soit $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ une série entière de rayon de convergence R. Alors

$$S \text{ est dérivable }]-R;R[$$

de plus

$$\forall x \in]-R;R[\ S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$$

D'autre part , $\sum n a_n x^n$ admet aussi R comme rayon de convergence.

Corollaire.

Soit $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ une série entière de rayon de convergence R. Alors

$$S \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-R;R[$$

de plus

$$\forall x \in]-R;R[, \forall p \in \mathbb{N}^*, S^{(p)}(x) = \sum_{k=p}^{+\infty} k(k-1)(k-p+1) a_k x^{k-p}$$

D'autre part , $\sum n^p a_n x^n$ admet aussi R comme rayon de convergence.

Conséquence unicité du DSE.

Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto b_n x^n$ coïncident sur un intervalle $]0, \alpha[$, $\alpha > 0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Intégration.

Soit $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ une série entière de rayon de convergence R. Alors

$$\forall x \in]-R;R[, \int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

de plus , cette série admet aussi R pour rayon de convergence.

10.3 Fonctions développables en série entière.

Définition.

Soit $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite développable en série entière en 0 si et seulement si il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R NON NUL et $r \in]0, R[$ tel que :

$$\forall x \in]-r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Condition nécéssaire.

1) Si f est développable en série entière en 0 alors il existe un réel $r > 0$ tel que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$.

2) f admet un unique développement en série entière en 0 : $\left(\sum \frac{f^n(0)}{n!}x^n\right)_{n\geq 0}$.

Série de Taylor.

S'il existe $r > 0$ tel que f soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$, la série entière $\left(\sum \frac{f^n(0)}{n!}x^n\right)_{n\geq 0}$ est appelée série de Taylor de f en 0.

Utilisation de la formule de Taylor reste intégral avec changement de variable.

Soit $a > 0$ et $f :]-a, a[\to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a, a[$. f est développable en série entière si et seulement si

$$\forall r \in]0, a[, \quad \forall x \in]-r, r[, \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{n+1}(xu)dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Chapitre 11

Espaces vectoriels normés

11.1 Normes

11.1.1 Définitions

Normes

Soit E un K- espace vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) . On dit que N est une norme sur E, si et seulement si elle vérifie :

1) N est une application de E dans $\mathbb{R}_+$
2) $\forall x \in E$, $N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$
3) $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in K, \quad N(\lambda x) =\mid \lambda \mid N(x)$
4) $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

Théorème

Si N est une norme sur E on a :

1) $N(0_E) = 0$
2) $\forall (x, y) \in E^2, \quad \mid N(x) - N(y) \mid \leq N(x - y) \leq N(x) + N(y)$
3) $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall (x_i) \in E^n, \forall \lambda_i \in K^n, \quad N(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mid \lambda_i \mid N(x_i).$

Normes d'algèbre

Soit E une $\mathbb{K}$-algébre. On dit que N est une norme d'algébre ,si et seulement si :

1) N est une norme
2) $\forall (x, y) \in E^2, \ N(x \times y) \leq N(x) \times N(y).$

Les Classiques

Si E est l'ensemble des fonctions continues sur une segment $[a,b]$, les normes suivantes sont explicitement au programme, soit $f \in E$, on définit

$$||f||_\infty = \text{Sup}\{|f(x)|, x \in [a,b]\}. \text{ Valable sur l'espace des fonctions bornées}$$

$$||f||_1 = \int_a^b \mid f \mid .$$

$$||f||_2 = \sqrt{\int_a^b \mid f^2 \mid}.$$

11.1.2 Distance

Distance

Une distance sur un ensemble non vide X est une application d de X^2 dans $\mathbb{R}$ telle que :

1) $\forall (x,y) \in X^2$, $d(x,y) \geq 0$
2)$\forall x\, d(x,x) = 0$
3)$\forall (x,y) \in X^2$, $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.
4) $\forall (x,y) \in X^2$, $d(x,y) = d(y,x)$.
5) $\forall (x,y,z) \in X^3$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Théorème

Distance associée à une norme

Si (E,N) est un espace vectoriel normé alors en posant $d(x,y) = N(x-y)$ on définit une distance sur E dite distance associée à N.

Distance à une partie

Soit $(X, ||)||$ un espace normé et d la distance associée ; $A \subset X$ une partie non vide et soit $x \in X$. On appelle distance de x à A le réel positif $d(x,A) = \underset{a \in A}{\text{Inf}}\ d(x,a)$

Théorème

$\forall (x,y) \in X^2$, $\mid d(x,A) - d(y,A) \mid \leq d(x,y)$

11.1.3 Partie bornée-boules ouvertes fermées

boules ouvertes fermées

Soit $a \in E$ et $r > 0$ on définit :

- La boule ouverte de centre a et de rayon r :

$$\mathcal{B}_0(a,r) = \{x \in E \mid \quad || \, x - a \, ||< a\}$$

- La boule fermée de centre a et de rayon r :

$$\mathcal{B}_f(a,r) = \{x \in E \mid \quad || \, x - a \, ||\leqslant r\}$$

- La sphère de centre a et de rayon r :

$$\mathcal{B}_f(a,r) = \{x \in E \mid \quad || \, x - a \, ||= r\}$$

Théorème

Une boule ouverte ou fermée est convexe

Partie bornée

on dit qu'une partie A de E est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in A, || \, x \, ||\leqslant M.$$

11.1.4 Produit fini d'evn

Théorème

Soit $(E_1, .., E_n)$ une famille finie d'espaces vectoriels normés , munis respectivement des normes $(N_1, ..N_n)$. L'application N définie sur l'espace produit $E = E_1 \times E_2 ... \times E_n$ par :

$$\forall x = (x_1, .., x_n) \in E_1 \times E_2 .. \times E_n, \qquad N(x) = \sup_{i \in [\![1,n]\!]} N_i(x_i)$$

est une norme sur E

11.2 Suites d'un evn

Dans toute la suite $E, ||.||$, désigne un espace vectoriel normé.

Convergence d'une suite

On dit qu'une suite $u = (u_n)$ d'éléments de E tend vers $l \in E$ si et seulement si $|| \, u_n - l \, ||$ converge vers 0 . C'est à dire (rappel) :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow || \, u_n - l \, ||\leq \epsilon.$$

on écrit parfois $u_n \underset{\substack{n \to +\infty \\ ||.||}}{\longrightarrow} l$

11.2.1 Résultats classiques

On obtient facilement les résultats classiques suivants

Théorème

La limite est unique, toute suite convergente est bornée

Théorème

L'ensemble des suites bornées est un sous espace vectoriel noté $l^\infty(E)$ et
$u \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} || u_n ||$ est une norme sur $l^\infty(E)$

Théorème

L'ensemble des suites convergentes est un sous espace vectoriel de $l^\infty(E)$ et l'application qui a une suite associe sa limite est une application linéaire

11.2.2 suites extraites,valeurs d'adhérence

déf : suites extraites

On dit que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\geq 0}$ s'il existe une fonction **strictement** croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\phi(n)}$

Déf : Valeur d'adhérence

On dit que l est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, s'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers l.

Théorème

Bolzano Weierstrass en avant première

Toute suite bornée d'une espace vectoriel normé de dimension finie admet une valeur d'adhérence

11.2.3 Séries dans un evn

série=suite des sommes partielles

On appelle série de terme général u_n la suite (S_n) définie par :

$$S_N = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

cette série est notée $\sum u_n$ sans a apriori quand à sa convergence.

Définition : série absolument convergente

On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum \| u_n \|$ est convergente.

Théorème

en dimension finie ACV$\Longrightarrow$ CV

Si E est de dimension finie alors toute série absolument convergente est convergente.

11.3 Comparaison des normes

11.3.1 Normes équivalentes

Normes équivalentes

Deux normes N_1 et N_2 sur le même $\mathbb{K}$-espace vectoriel sont dites *équivalentes* si et seulement si

$$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^*,\quad \forall x\in E,\quad \alpha N_1(x)\leq N_2(x)\leq \beta N_1(x).$$

Théorème

Toutes les normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel DE DIMENSION FINIE sont équivalentes

Théorème

Comment démontrer que deux normes ne sont pas équivalentes

N et N' ne sont pas équivalentes si et seulement si il existe une suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N} x_n\neq 0_E$ et $\dfrac{N'(x_n)}{N(x_n)}\underset{n\to+\infty}{\to} l$ où $l=0$ ou $l=+\infty$

Théorème

Si N_1 est dominée par N_2 alors toute suite convergente pour N_2 converge vers la même limite pour N_1

Théorème

Deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes et celles-ci ont même limite pour les deux normes.

11.3.2 exercices banque ccp 2016

exercice 37

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose, $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

exercice 38

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

$\forall\, P \in E$, on pose $N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max_{0\leq i\leq n} |a_i|$ où $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.

1. (a) Démontrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.
   (c) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
2. On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$. Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

11.4 Topologie des evn

11.4.1 Voisinage

Définition d'un voisinage

1) Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $a \in E$. On appelle voisinage de a toute partie $V \subset E$ telle qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(a, r) \subset V$.

Théorème

Si $V_1, V_2, .., V_n$ sont des voisinages de a alors $V_1 \bigcap ... \bigcap V_n$ est un voisinage de a

11.4.2 Ouvert et fermé

définition Partie ouverte

on dit d'une partie U de E est ouverte si elle est voisinage de chacun de ses points

$$\forall a \in U,\ \exists r > 0, \mathcal{B}(a, r) \subset U.$$

Théorème.

a) Une boule ouverte est ouverte.

b)Une réunion (éventuellement infinie) d'ouverts est ouvert ; une intersection **FINIE** d'ouverts est ouvert.

Définition d'une partie fermée.

On dira d'une partie de E qu'elle est fermée si son complémentaire est ouvert. On parle de fermé ou de partie fermée.

Théorème.

Une intersection (éventuellement infinie) de fermés est fermée ; une réunion **FINIE** de fermés est fermée.

11.4.3 Intérieur,adhérence,frontière

Définition intérieur frontière

Soit A une partie de E espace vectoriel normé .

1) Un élément a de E est dit intérieur à A si et seulement si A est un voisinage de A.
L'intérieur de A, noté $\mathring{A}$ ou $\text{Int}(A)$ est l'ensemble des points intérieurs à A.

2) Un élément a de E est adhérent à A si et seulement si tout voisinage de a rencontre A
L'adhérence de A,notée $\bar{A}$ est l'ensemble des points adhérents à A

3) Un élément a de E est dit frontière de A si et seulement si il est adhérent à A et à $E \setminus A$.
La frontière de A , notée $\text{Fr}(A)$ est l'ensemble des points frontières.

4) A est dense dans E si et seulement si $\bar{A} = E$. A est dense dans B si et seulement si $B \subset A$.

Théorème

Caractérisation de l'adhérence des fermés grâce aux suites.

Soient $(E, ||)||$ un espace vectoriel normé,$A \subset E$, et $a \in E$

1°

$$a \in \bar{A} \Longleftrightarrow \left(\exists u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in A, \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \end{cases} \right)$$

2° Un partie A est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A converge DANS A.

Théorème.

$\bar{A}$ est l'intersection des tous les fermés contenant A , c'est le plus petit fermé pour l'inclusion des fermés contenant A.

A° est la réunion de tous les ouverts contenus dans A, c'est le plus plus grand ouvert (pour l'inclusion) des ouverts contenus dans A.

En particulier A° est un ouvert, $\bar{A}$ est un fermé.

Définition d'une partie dense

On dit qu'une partie A est dense dans une partie B si et seulement si $B \subset \bar{A}$. La parte A est dense dans E si $\bar{A} = E$.

Théorème

Comment utiliser la densité : à l'aide des suites

A est dense dans B si et seulement si tout élément de B est limite d'une suite d'éléments de A.

en avance voir exo ccp35

Corollaire

Si f et g sont de fonction continues égales sur une partie dense de E alors $f = g$.

11.4.4 Topologie induite

Dans toute la suite : X est une partie de E et $a \in X$.

1) On appelle voisinage de a relatif à X , tout ensemble de la forme $V \bigcap X$ où V voisinage de a.

2) On appelle ouvert relatif à X tout ensemble de la forme $U \bigcap X$ où U est un ouvert de E.

3) On appelle fermé relatif à X tout ensemble de la forme $F \bigcap X$ où F est un fermé de E.

11.4.5 exercices banque ccp 2016

exercice 34

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
3. Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Démontrer que, si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

exercice 41

Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$. Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.

Remarques

1. On utilisera au moins une fois des suites.
2. On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire
3. Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

exercice 44

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) Montrer que $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   Remarque : Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.

3. (a) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

exercice 45

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
   On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.
   (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
   On pose $\forall x \in E,\ d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.
   (a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Rightarrow x \in \overline{A}$.
   (b) On suppose que A est fermée et que, $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall t \in [0, 1]$, $d_A(tx + (1-t)y) \leqslant t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$.
   Prouver que A est convexe.

Quelques démonstrations.

Caractérisation séquentielle des fermées

F une partie de $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé est fermée ssi $\forall (u_n)_{n\geq 0} \in F^{\mathbb{N}}$, qui converge vers u alors $u \in F$.

Montrons que si F est fermée alors $\forall (u_n)_{n\geq 0} \in F^{\mathbb{N}}$, qui converge vers u alors $u \in F$.

Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in F^{\mathbb{N}}$, qui converge vers u , supposons par l'absurde que $x \notin F$ c'est à dire $x \in F^c$, or F^c est un ouvert, donc il existe existe un voisinage de x inclus dans F^c, et en particulier une boule ouverte $\mathcal{B}_o(a, r) \subset F^c$. mais si on applique la définition de la convergence d'une suite pour $\epsilon = \dfrac{r}{2} > 0$, il existe N tel que $\forall n \geq N, ||(u_N - u)|| \leq \dfrac{r}{2}$, mais alors $u_n \in F$ mais $u_N \in B_o(a, r) \subset F^c$. Contradiction.

Montrons que si $(\forall (u_n)_{n\geq 0} \in F^{\mathbb{N}}$, qui converge vers u alors $u \in F$ alors F est fermée. par contraposée. On suppose que F n'est pas fermée et on exhibe une suite qui contredit la première partie de l'implication.

F^c n'est donc pas un ouvert, donc il existe $x \in F^c$ tel que F^c n'est pas un voisinage de x. Donc pour tout $r = \dfrac{1}{n}$, la boule $\mathcal{B}_o(a, r)$ n'est pas incluse dans F^c , donc il existe $x_n \in F \subset B_o(a, r)$. Par construction cette suite converge vers x (car $||(x_n - x)|| \leq \dfrac{1}{n}$, c'est une suite d'éléments de F qui converge vers un éléments de F^c.

Adhérence

On part de la définition suivante de l'adhérence :

$\bar{A}$ est l'ensemble des points adhérents de A, c'est à dire l'ensemble des limites de suites convergentes d'éléments de A.

Montrons que :

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ A \subset F}} F$$

Montrons d'abord que $\bar{A} \subset \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ A \subset F}} F$ c'est à dire que A est inclus dans tous les fermés qui contiennent F.

Soit F un fermé tel que $A \subset F$. Soit $u \in \bar{F}$ alors il existe $\forall (u_n)_{n\geq 0} \in A^{\mathbb{N}}$, qui converge vers u, mais alors $(u_n)_{n\geq 0} \in F^{\mathbb{N}}$ et converge toujours vers x ; mais F est fermé, d'après la caractérisation séquentielles des fermés, on a $x \in F$.

Montrons maintenant que $\bar{A}$ est une partie fermée, alors on aura $\bigcap_{F \text{ fermé}, A \subset F} F \subset \bar{A}$ car parmi les ensembles intersectés il y aura $\bar{A}$.

Pour montrer que $\bar{A}$ est fermé , deux méthodes.

• à l'aide de la caractérisation séquentielles des fermés. Soit $\forall (u_n)_{n\geq 0} \in \bar{A}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers u. Alors pour tout p, $u_p \in \bar{A}$, il existe donc une suite y^p telles que y_p converge vers u_p et $\forall n, y_n^p \in A$. Appliquons la définition de la convergence de toutes les suites y^p pour $\epsilon = \dfrac{1}{p}$. Il existe N_p tel que $N(y^p_{N_p} - u_p) \leq \dfrac{1}{p}$ mais alors :

$$N(y^p_{N_p} - u) = N(y^p_{N_p} - u_p + u_p - u) \leq \frac{1}{p} + N(u_p - u)$$

Or $N(u_p - u)$ tend vers quand p tend vers $+\infty$ donc $(y^p_{N_p})_{p\geq 0}$ converge vers u et donc $u \in \bar{A}$.

• On démontre que $\bar{A}^C$ est un ouvert . Soit $a \notin \bar{A}$, donc x n'est pas adhérent à A , il existe donc une $B_o(a,r)$ où $r > 0$ telle que $B_o(a,r) \bigcap A = \emptyset$. (être adherent cela veut dire que toute boule ouverte rencontre la partie.). Soit $y \in B_o(a,r)$, comme la boule ouverte est ouverte, on peut trouver r' tel que $B_o(y,r') \subset B_o(a,r) \subset A^c$, y n'est pas adhérent à A, donc $y \in \bar{A}^c$, donc $\bar{A}^c$ est un voisinage de a. CQFD.

Conséquences des résultats précédents

F est fermé ssi $\bar{F} = F$

Démonstration : On a toujours $F \subset \bar{F}$, de plus si F est fermé , comme $\bar{F}$ est l'intersection de tous les fermés contenant F, il y a parmi les ensembles intersectés F , donc $\bar{F} \subset F$.

$x \in \bar{A}$ ssi $\mathbf{d}(x, A) = 0$

Démonstration

Si $x \in \bar{A}$,alors tout voisinage de x rencontre A ; donc $B_o(a, 1/n) \bigcap A$ est non vide pour tout n, donc il existe $z \in A$ tel que $N(x - z) \leq 1/n$ donc
$\mathrm{d}(x, A) \leq 1/n$ pour tout n donc $\mathrm{d}(x, A) = 0$.

Réciproquement , si $d(x, A) = 0$, par caractérisation de la borne inférieure , pour tout $\epsilon > 0$, il existe $z \in A$ tel que $N(z - x) \leq \epsilon$, toute boule ouverte de centre x rencontre A, donc x est adhérent à A.

la fonction d_A est 1 lip.

On souhaite montrer que :

$$\forall x, y \in E, \mid d(x, A) - d(y, A) \mid \leq N(x - y).$$

on va montrer $d(x, A) - d(y, A) \leq N(x - y)$, et par symétrie on aura l'autre inégalité.

$\forall z \in A$, on a $N(x - z) = N(x - y + y - z) \leq N(x - y) + N(z - y)$, or d(x,A) est un minorant de $N(x - z)$ pur $z \in A$ donc :

$N(x - z) \geq d(x, A)$ donc

$$d(x, A) \leq N(x - y) + N(z - y)$$

On finit soit comme moi ou pour faire plaisir à Joséphine ainsi :

donc $\forall z \in A, \quad d(x, A) - N(x - y) \leq N(y - z)$, donc $d(x, A) - N(x - y)$ est un minorant de $N(y - z)$ or $d(y, A)$ est le plus grand des minorants donc

$$d(x, A) - N(x - y) \leq d(y, A).$$

11.5 Etude locale d'une application.

Rappels

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} = \{b \in F \mid \exists a \in A,\ b = f(a)\}.$$

$$f^{-1}(B) = \{a \in D \mid f(a) \in B\}.$$

Définition d'une limite

On considère deux evns $(E, ||)||$ et (F, N) , A une partie non vide de E,f une application de A vers F. Soit a un un point adhérent à A et l un point de F.

On dit que f admet $l \in F$ comme limite quand au point a si et seulement si

$$\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(a), \quad f(U \bigcap A) \subset V$$

.

on note $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} b$.

avec des epsilon on obtient :

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A, || x - a ||\leq \eta \Longrightarrow N(f(x) - b) \leq \epsilon$

Théorème

La limite si elle existe est unique et appartient à l'adhérence de $f(A)$.

Théorème

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, f une application d'une partie A de E dans F ,et g une application de $f(A)$ dans G.

Si f admet b pour limite en un point a adhérent A et si g admet c pour limite en b alors gof admet c pour limite au point a

11.5.1 Cas d'un ev produit et dimension finie

Théorème

Une application de E dans $F_1 \times F_2 \cdots \times F_k$ admet une limite en a si et seulement si chaque application coordonnées admet un limite.

Théorème

Si deux normes sont équivalentes l'existence et la valeur de la limite est indépendante des normes

11.5.2 Suites et continuité.

Théorème.

Soient f une application d'une partie A de E dans F et a un point adhérent à A
f admet une limite b en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A de

limite a alors la suite $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite b.

11.5.3 Applications continues.

•continuité et topologie.

Théorème

Hors programme

Soit $f : D \subset F \to E$, on a les équivalences :

1) f est continue

2) l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert relatif de D.

3) l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé relatif de D.

Théorème

Si f est continue de E dans F alors l'image réciproque de tout ouvert (resp fermé) est un ouvert (resp fermé).

11.5.4 Applications linéaires continues

Théorème fondamental

Soit u une application linéaire continue de E vers F, on a les équivalences :

1) u est continue
2) u est continue en 0_E.
3) $\exists k \geq 0$ tel que $\forall x \in E$, $|| u(x) ||_F \leq k || x ||_E$.
4) u est lipschitzienne.
5) u est bornée sur la boule unité fermée
6) u est uniformément continue.

Théorème

Si E est de dimension finie alors toute application linéaire de E dans F est continue.

• Norme subordonnée

Théorème

Les quatre réels suivants existent dans le cas d'une application linéaire CONTINUE de $\left(E, ||.||\right)$ $(E \neq \{0_E\})$dans (F, N) et sont égaux.

$$\inf\{M \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \in E, N(f(x)) \leq M || x ||\}$$

$$\sup\{N(f(x)) \mid || x || \leq 1\}$$

$$\sup\left\{\frac{N(f(x))}{|| x ||} \mid x \neq 0_E\right\}.$$

$$\sup\{N(f(x)) \mid || x || = 1\}$$

On l'appelle norme subordonnée aux deux normes précédentes, on note $|||u|||_{||.||,N}$.

• Composition des applications linéaires continues

Théorème

1) $\mathcal{LC}(E, F)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ et $||| \, |||$ est une norme sur $\mathcal{LC}(E, F)$.

2) Si $f \in \mathcal{LC}(E, F)$, $\forall x \in E$, $N(f(x)) \leq ||| \ f \ ||| \ || \ x \ ||$;

3) Si $(E, ||)||$, (F, N), (G, ν) sont trois sous espaces vectoriels normés, $f \in \mathcal{LC}(E, F)$, $g \in \mathcal{LC}(F, G)$ alors $gof \in \mathcal{LC}(E, G)$ et $||| \ gof \ ||| \leq ||| \ g \ ||| \times ||| \ f \ |||$.

4) Pour $(F, N) = (E, ||)||$ et $E \neq \{0_E\}$, $||| \, |||$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{LC}(E, E)$ et $||| \ \mathrm{Id}_E \ ||| = 1$.

• Continuité d'une application bilinéaire.

Théorème

Caractérisation fondamentale

Soient $(E_1, ||_|1)$ et $(E_2, ||_|2)$, (F, N) trois espaces vectoriels normés et B une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ vers F.

B est continue sur $E_1 \times E_2$ si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}+,\ \forall (x,y) \in E_1 \times E_2)$ $N(B(x,y)) \leq M \mid\mid x_1 \mid\mid_1 \mid\mid x_2 \mid\mid_2$.

11.5.5 exercices ccp

exercice 35

E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

1. Soient f une application de E dans F et a un point de E.
   On considère les propositions suivantes :

   P1. f est continue en a.

   P2. Pour toute suite (x_n) d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

   Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.
2. Soit A une partie dense d'un sous-espace vectoriel normé E, et soient f et g deux applications continues de E dans F, F désignant un espace vectoriel normé.
   Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

exercice 36 Soient E, F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

   P1. f est continue sur E.

   P2. f est continue en 0_E.

   P3. $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant k \|x\|$.
2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

   Démontrer que φ est linéaire et continue.

11.6 Compacité

11.6.1 valeurs d'adhérences

Définition.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d' éléments de E, un espace normé.

1) On appelle sous suite ou suite extraite de u une suite de la forme $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

2) On appelle valeur d'adhérence de u tout $l \in E$ tel qu'il existe une sous suite de u tel que $(u_{\phi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} l$.

Théorème

L'ensemble V des valeurs d'adhérence d'une suite (u_n) est un fermé car

$$V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$$

où $U_n = \{u_p \mid p \geq n\}$.

Définition.

Une partie A de E un evn est dite **compacte** ou un compact de E si et seulement si toute suite d'éléments de A posséde une valeur d'adhérence dans A.

Théorème.

Une partie compacte est fermée et bornée.

Théorème.

Toute partie fermée d'un compact est elle même compact.

Théorème.

Un produit (ou intersection ou réunion) fini de parties compactes est compacte.

Théorème

Big théorème

Si A est une partie compacte de E, si une suite d'éléments de A admet une et une seule valeur d'adhérence alors la suite converge vers cette valeur d'adhérence.

11.6.2 Cas de la dimension finie

Théorème

Soit E un evn de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. De toute suite bornée de E on peut extraire une sous suite convergente.

éléments de démonstration

Etape 1

Si A est un compact de F et B un compact de de G alors $A \times B$ est un compact de $F \times G$.

étape 2

On montre le résultat pour la norme infinie

Etape 3 on finit la démonstration, en utilisant l'équivalence des normes en dimension finie.

Théorème

Soit E un evn de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors les compacts sont les parties fermées bornées.

Théorème.

Soit E un evn de dimension quelconque sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F un sous espace vectoriel de dimension finie de E alors F est fermé.

11.6.3 Séries d'un evn de dimension finie.

Théorème.

Dans un evn de DIMENSION FINIE, toute série absolument convergente est convergente et

$$N(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} N(u_n).$$

Théorème.

Si E est un algèbre de dimension finie muni d'une norme d'algèbre alors la série $(\sum \frac{a^n}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente pour tout $a \in E$. De plus si $ab = ba$ alors $e^{a+b} = e^a e^b = e^b e^a$.

11.6.4 Parties compactes et fonctions continues

Théorème

Si K est une partie compacte de E et f une fonction continue sur K. Alors $f(A)$ est une partie compacte de F.

Théorème

Soit K un compact non vide de E et f une application continue sur A **à valeurs réelles** alors f est bornée et atteint ses bornes.

Théorème

Déjà vu mais avec la démonstration

En dimension finie toutes les normes sont équivalentes

Théorème

Une fonction continue sur un compact est uniformément continue.

11.7 Connexité par arcs

Définition.

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E ;

1) Un **arc** de A d'origine x et d'extrémité y est une application continue γ de $[0,1]$ dans A , telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

2) A est **connexe par arcs** si et seulement si pour tout couple de points $(x, y) \in A^2$, il existe un arc de A d'origine x et d'extrémité y.

3) A est convexe si et seulement si pour tout couple $(x, y) \in A^2$, le segment $[x, y] = \{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\}$ est inclus dans A

4) A est étoilé si et seulement si il existe $a \in A$ tel que $\forall x \in A,\ [a, x] \subset A$.

Définition relation d'équivalence.

La relation binaire définie sur A par :

$a\mathcal{R}b$ si et seulement si il existe un chemin inscrit dans A joignant a à b.

est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont appelées composantes connexes par arcs.

Théorème.

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

Théorème

Soit A une partie connexe par arcs de E et f une application continue sur A. Alors $f(A)$ est une partie connexe par arcs de F.

Théorème

Théorème des valeurs intermédiaires version evn

Soit A une partie connexe par arcs de E et f une application continue sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1) $f(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2) S'il existe $a_i \in A$ tel que $f(a_i) = t_i$ avec $t_1 \leq t_2$ alors $\forall t \in [t_1, t_2]$, $\exists c \in A$, $f(c) = t$.

3) S'il existe $a_i \in A$ tel que $f(a_1)f(a_2) \leq 0$ alors $\exists c \in A$, $f(c) = 0$.

4)Si $\forall c \in A, f(c) \neq 0$ alors f garde un signe constant sur A.

Chapitre 12

Equations différentielles.

12.1 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

Problème de Cauchy.

On appelle problème de Cauchy l'équation différentielle

$$y' + a(t)y = b(t).$$

ave la condition initiale $y'(t_0) = y_0$.
Le problème de Cauchy est résolu pratiquement et théoriquement :

Théorème.

Si $t \mapsto a(t)$ et $t \mapsto b(t)$ sont continues sur un intervalle alors le problème de Cauchy admet une solution unique.

Remarque L'unicité de la solution du problème de Cauchy permet de déduire des propriétés des solutions sans résoudre par exemple parité des solutions

Théorème.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

est un sous espace affine de direction l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène.

Expression intégrale des solutions de l'équation sans second membre

Si $t \mapsto a(t)$ est continue alors l'ensemble des solutions de :

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

est

$$\text{Vect}\left\{t \mapsto \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} a(u)\mathrm{d}u\Big)\right\}.$$

Expression explicite des solutions.

Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy :

$$y' + a(t)y = b(t). \qquad y(t_0) = y_0$$

admet l'unique solution :

$$y(t) = \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} b(u) e^{A(u)} du \right\} \right) e^{-A(t)}$$

où A est la primitive de a qui s'annule en t_0.

remarque : il est souvent aussi simple de retrouver l'expression à l'aide de la méthode utilisée dans la démonstration

méthode dite de variation de la constante.

On peut trouver une solution"particulière" de l'équation avec second membre , en cherchant y sous la forme :

$$y(t) = \lambda(t)\phi(t)$$

où ϕ est une solution de l'équation sans second membre précédemment déterminée.

12.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2.

12.2.1 Le problème de Cauchy.

Définition

On appelle problème de Cauchy (scalaire linéaire d'ordre 2) l'équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$y" + a(t)y' + b(t)y(t) = c(t)$$

avec les conditions initiales

$$y(t_0) = y_0 \qquad y'(t_0) = v_0.$$

Théorème.

Si les fonctions a, b, c sont continues sur I un intervalle alors le problème de Cauchy admet une unique solution.

12.2.2 Structure des solutions.

Théorème

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel de dimension 2.

Théorème

L'ensemble des solutions avec second membre est un sous-espace affine de direction l'ensemble des solutions de l'équation homogène, c'est à dire

$$\forall t \in I,\ y(t) = y_0(t) + y_1(t)$$

où y_0 est solution particulière de l'équation complète et y_1 est solution de l'équation homogène.

12.2.3 Wronskien

Une application du théorème de Cauchy (dont la démonstration est hors programme) est la détermination d'une base de l'équation homogène.

Exercice Soient ϕ et ψ deux solutions de l'équation sans second membre :

$$y" + a(t)y' + b(t)y = 0$$

On pose

$$w(t) = \begin{vmatrix} \phi(t) & \psi(t) \\ \phi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix}$$

Montrer que w est solution de :

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

en déduire le théorème suivant :

Théorème.

Soient ϕ et ψ deux solutions de l'équation sans second membre :

$$y" + a(t)y' + b(t)y = 0$$

On a les équivalences :
(1) $(\psi\ ,\ \phi)$ est une base des solutions.
(2) $\exists t \in I\ \ w(t) \neq 0$.
(3)$\forall t \in I\ \ w(t) \neq 0$.

12.2.4 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

remarque
1) On sait déterminer une expression des solutions à l'aide d'intégrales.
2) Il est souvent plus facile de considérer des solutions à valeurs complexes.

Théorème.

Si l'équation caractéristique admet deux solutions complexes distinctes α et β alors l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\text{Vect}\{t \mapsto e^{\alpha t}, t \mapsto e^{\beta t}\}$$

Si l'équation caractéristique admet une unique solution α alors l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\text{Vect}\{t \mapsto e^{\alpha t}, t \mapsto te^{\alpha t}\}$$

cas réel.

Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes α et β alors l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\text{Vect}\{t \mapsto e^{\alpha t}, t \mapsto e^{\beta t}\}$$

Si l'équation caractéristique admet une unique solution réelle α alors l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\text{Vect}\{t \mapsto e^{\alpha t}, t \mapsto te^{\alpha t}\}$$

Si l'équation caractéristique admet deux solutions complexes distinctes conjuguées α et $\bar{\alpha}$ alors l'ensemble des solutions de l'équation homogène est (en notant $\alpha = x + iy$) :

$$\text{Vect}\{t \mapsto cos(yt)e^{tx}, t \mapsto sin(ty)e^{xt}\}.$$

12.2.5 Recherche de solution particulière dans des cas particuliers.

Theorème.

L'équation différentielle à coefficients constants :

$$y" + ay' + y = P(t)e^{\beta t}$$

où P est un polynôme et $\beta \in \mathbb{C}$,
admet une solution particulière de la forme $t \mapsto Q(t)P(t)e^{\beta t}$ où Q est un polynôme de degré
degré(Q)= degréP si β n'est pas solution de l'équation caractéristique.
degré(Q)= degré$P + 1$ si β est solution simple de l'équation caractéristique.
degré(Q)= degré$P + 2$ si β est solution double de l'équation caractéristique.

12.2.6 recherche de solutions développables en série entière

Un exemple complet :

$$(1 - t^2)y" - 4ty' - 2y = 0.$$

12.2.7 Méthode de variations des constantes : première approche

Supposons déterminées deux solutions,ψ et ϕ libres de l'équation homogène :

$$y" + a(t)y' + b(t)y(t) = 0$$

(ce qui est le cas des équations à coefficients constants.) On peut trouver une solution de l'équation complète sous la forme

$$t \mapsto \lambda(t)\psi(t) + \beta(t)\phi(t)$$

où λ et β sont des fonctions dérivables vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda'(t)\psi(t) + \beta'(t)\phi(t) & = 0 \\ \lambda'(t)\psi'(t) + \beta'(t)\phi'(t) & = c(t) \end{cases}$$

remarque Inutile d'apprendre par coeur ce résultat : le nom de la méthode suffit. On fait varier les constantes et on veut obtenir un système d'ordre 1.

Chapitre 13

Systèmes différentiels.

13.1 Notations

Il est très important de s'approprier les notations de ce chapitre, au risque de confondre scalaires et vecteurs. Dans tout le chapitre E désigne un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition :Système différentiel.

on appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1** une équation de type :

$$x' = a(t)x + b(t)$$

où a désigne une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ et b une application continue de I dans E. La fonction inconnue est $x : I \to E$.

On appelle solution sur I de l'équation différentielle toute application ϕ dérivable sur I à valeurs dans E telle que

$$\forall t \in I,\ \phi'(t) = a(t)\phi(t) + b(t).$$

☞ Remarque : la notation $a(t)\phi(t)$ doit être comprise ainsi : $a(t)\left(\phi(t)\right)$ c'est à dire que $a(t)$ est une application linéaire $\phi(t)$ un vecteur de E, et donc $a(t)\phi(t)$ un vecteur de E.

Si on choisit une base $\mathcal{B}$ de E , le système s'écrit :

$$\forall t \in I, X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

où $A(t)$ est la matrice carrée associée à l'endomorphisme $a(t)$ et $B(t)$ le vecteur colonne représentant $b(t)$. L'expression $A(t)X(t)$ étant un produit matriciel.

Théorème : Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.

Une fonction x, continue sur I, est solution du problème de Cauchy $x' = a(t)(x) + b(t)$ et de la condition initiale $x(t_0) = x_0$ si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left(a(u)\left(x(u)\right) + b(u)\right) \mathrm{d}u.$$

13.1.1 Structure des solutions.

Définition : Problème de Cauchy.

on appelle problème de Cauchy : l'équation différentielle $x' = a(t)x + b(t)$ sur I avec les conditions initiales $x(t_0) = x_0$ où $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$.

Théorème :Cauchy Lipschitz pour les systèmes différentielles linéaires d'ordre 1.

Soient a, b deux applications continues sur l'intervalle I, à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$ pour la première et E pour la seconde. Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$.

Le problème de Cauchy possède une unique solution sur I.

13.1.2 Dimension des solutions.

Théorème :Dimension des solutions.

1) L'ensemble S_0 des solutions de l'équation homogène (E_0) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de dimension n=dim(E).

2) Pout tout $t_0 \in I$, $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme entre l'espace des solutions de l'équation homogène et E.

3) Une solution de l'équation complète est la somme d'une solution dite particulière et d'une solution de l'équation homogène. C'est un sous espace affine de dimension n.

13.1.3 Système fondamental des solutions-Wronskien.

Définition

On appelle système fondamental de solutions toute base de l'espace des solutions de l'équation homogène.

On connait la dimension de cet espace d'après le théorème de Cauchy.

Théorème.

Soient $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de solutions de l'équation homogène. On a les équivalences :

1) C'est une base des solutions.

2) $\exists t_0$ tel que $w(t_0) = \det_{\mathcal{B}}(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) \neq 0$.

3) $\forall t$, $w(t) = \det_{\mathcal{B}}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \neq 0$.

Remarque le wronskien n'apparaît au programme que dans les cas des équations scolaires d'ordre 2, mais il faut comprendre l'incidence de l'unicité dans le théorème de Cauchy.

13.2 Retour sur les équations scalaires.

Retenir : une équation scalaire d'ordre n se ramène un système différentiel de taille n. Le calcul qui suit s'adapte aux suites récurrentes linéaires d'ordre n.

On considère l'équation différentielle claire suivante :

$$x^{(n)} = a_{(n-1)}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x(t) + b(t).$$

où les a_i sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Cette équation est équivalent au système différentiel de la forme

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t).$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \text{ et } B(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$$

13.3 Exponentielle de matrices.

13.3.1 Définition -rappel.

On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de la norme $\text{tr}(A^T A)$ qui vérifie :

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

Théorème.

Pour toute matrice $A \in E$, la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente (donc convergente). On appelle exponentielle de la matrice la somme :

$$exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

De plus si A et B commutent, ($AB = BA$) alors $\exp(A+B)$=$\exp(A)\exp(B)$.

Théorème.

$\exp(A)$ est inversible d'inverse $\exp(-A)$.

démonstration car A et $-A$ commutent.

Théorème.

La fonction $A \mapsto exp(A)$ est continue.

Il faut au minimum citer ce théorème quand on en a besoin ; par exemple si $(A_p)_{p\geq 0}$ est une suite de matrices convergentes vers A alors $(\exp(A_p))_{p\geq 0}$ converge vers $\exp(A)$. Pour la démonstration : retenir il y a convergence normale sur tout boule compacte de E par majoration grossière ; $A \mapsto \frac{A^n}{n!}$ est continue car polynomiale en les coefficients.

13.3.2 Calcul pratique de l'exponentielle de matrice.

Cas 1 A est diagonale : par trop dur
Cas 2 A est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage P alors :

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}.$$

Cas 3 A est nilpotente $A^p = 0_E$, alors la somme infinie est finie :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{A^k}{k!}.$$

Cas 4 Il y a aurait des indications : on peut par ex utiliser un polynôme annulateur.
Remarque : les différents résultats ci dessus s'appliquent également à $a \in \mathcal{L}(E)$.

13.3.3 Dérivée de $t \mapsto \exp(tA)$ ou $t \mapsto \exp(ta)$.

Théorème.

L'application $exp_a : t \mapsto \exp(ta)$ est de calsse $\mathcal{C}^\infty$ et :

$$exp'_a : t \mapsto a \circ \exp(ta) = \exp(ta) \circ a.$$

Démonstration Convergence normale sur $[-M, M]$ (intervalle des "t") de la série des dérivées.
On obtient le résultat sur les matrices :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$$

13.4 Système différentiels linéaires à coefficients constants.

13.4.1 Résolution de l'équation homogène.

Théorème

Le problème de Cauchy :

$$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$

où $a \in \mathcal{L}(E)$ admet une unique solution :

$$x(t) = \exp\left((t - t_0)a\right)(x_0).$$

13.4.2 Résolution de l'équation complète.

On s'intéresse au système complet : $x't) = a(t)x(t) + b(t)$ ou matriciellement $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$

Lemme étonnant mais pas tant que ça.

Soit $x_1, \ldots, x_n$ un système fondamental de solutions de l'équation homogène $x' = a(t)(x)$. Toute fonction x dérivable de I dans E s'écrit de façon unique :

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)x_i(t)$$

où $(c_1, \ldots, c_n)$ est une famille de fonctions dérivables de I dans $\mathbb{K}$.

Remarque : il n'est pas supposé que x soit solution d'une quelconque équation différentielle, la difficulté est de montrer que les c_i sont dérivables.

Méthode matricielle :

Pour résoudre $X' = A(t)X(t) + B(t)$ connaissant un système fondamental de solutions représenté par une matrice carrée $M(t)$, on cherche $X(t) = M(t)C(t)$ alors X est solution de l'équation complète si et seulement si

$M(t)C'(t) = B(t)$ ou encore $\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)x_i(t) = b(t)$

Retour sur la méthode de variations des constantes pour un système scalaire d'ordre 2.

$$x"(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t).$$

Si on connait deux solutions indépendantes de l'équation homogène : ϕ_1 et ϕ_2 alors une solution particulière s'écrira

$\phi(t) = c_1(t)\phi_1(t) + c_2(t)\phi_2(t)$. La condition vectorielle s'écrit à l'aide des vecteurs :

$$X_i(t) = \begin{pmatrix} \phi_i(t) \\ \phi_i'(t) \end{pmatrix} \text{ et de la matrice second membre } \begin{pmatrix} c(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où le système :

$$\begin{cases} c_1'(t)\phi_1(t) + c_2'(t)\phi_2(t) & = 0 \\ c_1'(t)\phi_1'(t) + c_2'(t)\phi_2'(t) & = b(t) \end{cases}$$

ce qui justifie dans l'étude du chapitre précédent d'avoir imposé la première équation.

13.5 Ce qu'il faut savoir faire :

1° Résoudre un système homogène à coefficients constants :
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' & = y + z \\ y' & = x \\ z' & = x + y + z \end{cases}$$

2° Résoudre un système avec second membre à coefficients constants
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1' & = -x_1 + 3x_2 + e^t \\ x_2' & = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

3° Résoudre un système homogène à coefficients non constants mais diagonalisable par P constant.
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1' & = (2-t)x_1 + (t-1)x_2 \\ x_2' & = 2(1-t)x_1 + (2t-1)x_2 \end{cases}$$

4° Résoudre un système avec second membre à coefficients non constants mais diagonalisable par P constant.
Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' & = (1+t)x_1 + tx_2 - e^t \\ x_2' & = -tx_1 + (1-t)x_2 + e^t \end{cases}$$

5° Calculer une exponentielle de matrice sans diagonaliser.
On note :

$$A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

En interprétant géométriquement A donner A^p pour tout p. En déduire $\exp(tA)$ pour tout réel t. on trouvera :

$$e^{tcos(\theta)} \begin{pmatrix} cos(tsin(\theta)) & -sin(tsin(\theta)) \\ sin(tsin(\theta)) & cos(tsin(\theta)) \end{pmatrix}$$

On considère le systéme :

$$\begin{cases} x' &= cos(\theta)x(t) - sin(\theta)y(t) \\ y' &= sin(\theta)x(t) + cos(\theta)y(t) \end{cases}$$

Résoudre le système puis le système avec second membre suivant à l'aide de la méthode de variations des constantes :

$$\begin{cases} x' &= cos(\theta)x(t) - sin(\theta)y(t) + cos(tsin(\theta)) \\ y' &= sin(\theta)x(t) + cos(\theta)y(t) + sin(tsin(\theta)) \end{cases}$$

13.6 Complément.

Démonstration de Cauchy cours td.

mode d'emploi : remplir directement sur la feuille les démonstrations manquantes

On se propose de démontrer ce théorème

Théorème de Cauchy linéaire.

Soient a, b deux applications continues sur l'intervalle I , à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$ pour la première et E pour la seconde. Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$.

Le problème de Cauchy possède une unique solution sur I

On suppose que I est un segment ce qui n'est pas restrictif. (il suffit de considérer tous les segments inclus dans I pour généraliser).

1. Montrer que le problème de Cauchy est équivalent à l'équation intégrale :

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))ds$$

On introduit la suite de fonctions définies par $z_0(t) = y_0$ et $z_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} a(s)z_n(s) + b(s)ds$

2. Majorer $|| z_{n+1}(t) - z_n(t) ||$en fonction de $|| z_n(s) - z_{n-1}(s) ||$.

3. Soit $I_{a,b} = [t_0 - a, t_0 + b] \subset I$. On note

$$K = \sup_{t \in I_{a,b}} ||| A(t) |||, \qquad M_1 = \sup_{t \in I_{a,b}} || z_1(t) - z_0(t) || .$$

Montrer que pour tout $t \in [a, b]$ on a

$$|| z_{n+1}(t) - z_n(t) || \leq \frac{M_1 K^n (b-a)^n}{n!}.$$

4. Prouver que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{K}$ (théorème convergence normale implique...) vers une fonction z

5. montrer que z est une solution du problème : on n'oubliera pas de démontrer que z est continue.

remarque On aurait pu aussi démontrer que l'application

$$\Phi = \ E \to E \quad F \mapsto \phi(F) = \ I \to \mathbb{K}^p \quad t \mapsto X_0 + \int_{t_0}^{t} A(u)F(u) + B(u)du$$

est k contractante est utiliser l'une des formulations du théorème du point fixe de Brower qui donne existence et l'unicité d'un point fixe et donc unicité au problème de Cauchy.

Chapitre 14

Intégrales à paramètre

14.1 Limite et continuité.

• Objet d 'étude :

$$x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{dt}$$

Dans tout ce chapitre, le fil rouge sera l'exemple :

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{ch}^2(t)}\mathrm{d}t.$$

Ensemble de définition

L'ensemble de définition de ϕ est la réunion de l'ensemble des x tels que $t \mapsto f(x,t)$ soit intégrable sur I et de l'ensemble des x tels que $t \mapsto f(x,t)$ soit semi intégrable.

Ccontinuité par domination globale.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b soit $A \subset \mathbb{R}^p$ et soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ $(x,t) \mapsto f(x,t)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On suppose

(i) Pour tout $t \in I$ l'application $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.

(ii) Pour tout $x \in A$ l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I (et intégrable par (iii)).

(iii) il existe $\phi \in L^1(I,\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in A, \forall t \in I, \mid f(x,t) \mid \leq \phi(t)$ (**hypothèse de domination**).

alors $F :$ $A \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$ est définie et continue sur A.

(continuité par domination sur tout compact.)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b soit $A \subset \mathbb{R}^p$ et soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ $(x,t) \mapsto f(x,t)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On suppose

(i) Pour tout $t \in I$ l'application $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.

(ii) Pour tout $x \in A$ l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I (et intégrable par (iii)).

(iii) Pour tout compact $K \subset A$,il existe $\phi_K \in L^1(I,\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in K, \forall t \in I, \mid f(x,t) \mid \leq \phi_K(t)$ (**hypothèse de domination**).

alors $F : \quad A \to \mathbb{K}, \qquad x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt$ est définie et continue sur A.

(limites finies aux bornes de l'intervalle.)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b soit $A \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \bar{A}$ ou $x_0 = +\infty$ soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ $(x,t) \mapsto f(x,t)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On suppose

(i) Pour tout $x \in A$ l'application $x \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I (et intégrable par (iii)).

(ii) il existe $\phi \in L^1(I,\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in A (\forall t \in I, \mid f(x,t) \mid) \leq \phi(t)$ (**hypothèse de domination**).

(iii) Pour tout $t \in I$, $f(x,t) \underset{\substack{x \mapsto a \\ x \in A}}{\longrightarrow} g(t)$.

(iv) $g \in \mathcal{C}^0_{mcx}(I,\mathbb{R})$.

alors g est intégrable sur I et $\displaystyle\int_a^b f(x,t)dt \underset{\substack{x \mapsto a \\ x \in A}}{\longrightarrow} \int_a^b g(t)dt$.

14.2 Dérivation.

rappel sur les fonctions de deux variables

Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ définie sur $A \times I$. On dit que f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ si

$$\forall t \in I, \text{ la fonction } \phi_t : x \mapsto f(x,t) \text{ est dérivable}$$

on écrit alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \phi_t'(x)$$

.

dérivation sous le signe intégrale : formule de Leibniz

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et

$$f : \ J \times I \to \mathbb{K} \quad (x,t) \mapsto f(x,t)$$

on suppose :

(i) Pour tout $x \in J$ l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.

(ii) Pour tout $(x,t) \in J \times I$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe.

(iii) Pour tout $t \in I$, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue sur J.

(iv) Pour tout $x \in J$ l'application $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.

(v) il existe $\psi \in L^1(I,\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in J, (\forall t \in I, | \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) | \leq \psi(t))$.

alors $F : J \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur J et $\forall x \in J, F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

domination locale.

avec les notations précédentes ,on suppose :

(i) Pour tout $x \in J$ l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.

(ii) Pour tout $(x,t) \in J \times I$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ exsite.

(iii) Pour tout $t \in I$, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue sur J.

(iv) Pour tout $x \in J$ l'application $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.

(v) Pour tout segment $K \subset J$ il existe $\psi_K \in L^1(I,\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in K, (\forall t \in I, | \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) | \leq \psi(t)$.

alors $F : J \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur J et $\forall x \in J, F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

brève extension aux dérivées supérieures

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, n un entier ≥ 1 et

$$f : \ J \times I \to \mathbb{K} \quad (x,t) \mapsto f(x,t)$$

on suppose :

(i) Pour tout $x \in J$ l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.

(ii) Pour tout $j \leq n$ pour tout $(x,t) \in J \times I$, $\dfrac{\partial^j f}{(\partial x)^j}(x,t)$ existe.

(iii)Pour tout $j \leq n$, pour tout $j \leq n$, pour tout $t \in I$, $x \mapsto \dfrac{\partial^j f}{(\partial x)^j}(x,t)$ continue sur J.

(iv))Pour tout $j \leq n$, pour tout $x \in J$ l'application $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{(\partial x)^j}(x,t)$ est continue par morceaux sur I.

(v)Pour tout $j \leq n$, il existe $\psi_j \in L^1(I,\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in J, (\forall t \in I, | \dfrac{\partial^j f}{(\partial x)^j}(x,t) | \leq \psi_j(t)$.

alors $F : J \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt$ est $\mathcal{C}^n$ sur J et $\forall j \leq n \forall x \in J, F^{(j)}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial^j f}{(\partial x)^j}(x,t)dt$.

14.3 Application à la fonction Γ d'Euler

Definition

On note Γ la fonction (fonction Gamma d'Euler définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x>0, \qquad \Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Fonctions Gamma d'Euler

1) Γ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall x>0$, $\Gamma^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty}(lnt)^k t^{x-1}e^{-t}dt$.

2) $\forall x>0, \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

3)$\forall n\in\mathbb{N}, \Gamma(n+1)=n!$, c'est à dire $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt=n!$.

4) $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}=2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

5) Γ est une fonction convexe sur $]0,+\infty[$.

6) Γ admet un unique minimum sur $]0,+\infty[$ en $x_{min}\approx 1,4616$ et $\Gamma(x_{min})\approx 0,8856$ de plus $\lim\limits_{x\to 0^+}\Gamma(x)=+\infty$ et $\Gamma(x)\underset{0^+}{\sim}\frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\Gamma(x)=+\infty$.

Chapitre 15

Calcul différentiel

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert d'une $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et à valeurs dans un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé de dimension finie. Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.

15.1 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

dérivée suivant un vecteur

Soit f définie de U dans F et $\vec{h}$ un vecteur de E non nul . Lorsque la fonction vectorielle de la variable t, définie par $\phi(t) = f(a + t\vec{h})$ est dérivable en $t = 0$, on dit que f admet en a une dérivée partielle selon le vecteur $\vec{h}$ et on note :

$$D_{\vec{h}} f(a) = \phi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{h}) - f(a)}{t} \in F.$$

dérivées partielles

Soient $f : U \subset\to F$, $a \in U$. On appelle dérivées partielles de f en a , dans la base $(a_i)_i$ de E les dérivées suivant les vecteurs $a_1.a_2, .., a_p$ On les note

$$D_{a_i} f(a) = \mathrm{d}fx_i = \partial_i f = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t.a_i) - f(a)}{t}$$

15.2 Différentielle

15.2.1 Définition

Définition à apprendre par coeur

On dit que f est **différentiable en** $a \in U$ si et seulement si il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$ et une application $\epsilon : (-a) + U \to \mathbb{F}$ telles que :

$$\forall h \in (-a) + U, f(a+h) = f(a) + L(h) + N(h)\epsilon(h) \text{ et } \epsilon(h) \xrightarrow[h \to 0_{\mathbb{E}}]{} 0_F$$

ce que l'on écrira plus simplement :

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h)$$

on dit que f admet un développement limité d'ordre 1

Exemples : le cas $E = \mathbb{R}$ et le cas f linéaire.

théorème et définition

Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a alors l'application linéaire $L_a \in \mathcal{L}(E, F)$ qui le décrit est unique, on l'appelle application linéaire tangente à f en a.

Théorème 2

Si f est différentiable en a alors
1) f est continue en a
2) f est dérivable en a suivant tout vecteur v de E et $D_v f(a) = L_a(v)$.

Définition

On dit que f est différentiable sur un ouvert U, si elle est différentiable en tout point de U. On appelle alors différentielle de f sur U l'application $\mathrm{d}f$ de U dans $\mathcal{L}(E, F)$.

On écrit le théorème 2 dans une base :

Lien entre différentielle et dérivée partielle dans une base

Si f est différentiable en a, alors pour toute base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, f admet des dérivées partielles.
Si on écrit $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$, la dérivée de f selon u est donnée par :

$$D_u f(a) = \sum_{i=1}^{n} u_i D_i f(a).$$

introduction rapide aux notations différentielles :
On dote dx_i la différentielle de la projection de E sur $\mathrm{Vect}(e_i)$ alors

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a)\ \mathrm{d}x_i(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\ \mathrm{d}x_i(a).$$

matrice jacobienne

Pour toute application f différentiable de E dans F. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une base de F. Alors, on note f_i pour $i = 1$ à n les applications coordonnées, la matrice dans les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ de $\mathrm{d}f(a)$ est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

Théorème

Si f est différentiable en $a = (a_1, a_2, .., a_p)$ alors au voisinage de a , on a

$$f(x_1, x_2, .., x_p) = f(a_1, a_2, .., a_p) + \sum_{j=1}^{p} (x_j - a_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o\big(N(x-a)\big)$$

15.2.2 Opérations sur les fonctions différentiables

Linéarité

théorème

Si f et g sont différentiables sur U et λ, μ deux réels alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable et :

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda \ \mathrm{d}f + \mu \ \mathrm{d}g$$

cas des fonctions bilinéaires

théorème

Soient f, g à valeurs dans F et G différentiables et $B : F \times G \to H$ bilinéaire alors

$$\mathrm{d}(B(f,g)) = B(\ \mathrm{d}f, g) + B(f,\ \mathrm{d}g).$$

Remarque ce résultat fait l'objet d'un exercice ccp :

EXERCICE 58 analyse

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normées de dimension finie.
   Soit $a \in E$ et soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

   Donner la définition de "f différentiable en a".

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
   Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

   On pose : $\forall x \in E,\ \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|,$ où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$

   On pose : $\forall (x, y) \in E \times E,\ \|(x, y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty).$

On admet que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|.\|$ est une norme sur $E \times E$.
Soit $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.

(a) Prouver que $\exists\, C \in \mathbb{R}^+ / \,\forall\,(x,y) \in E \times E,\ |B(x,y)| \leqslant C\|x\|_\infty \|y\|_\infty$.

(b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

15.2.3 Règle de la chaîne

composition : règle de la chaîne

Soient f une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont notées $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ et g une application d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ dont la variable est notée $y = (y_1, y_2, .., y_n)$, on suppose

1) f est différentiable.
2) g est différentiable
3) $f(U) \subset \Omega$ alors :
1) fog est différentiable sur U
2) $\forall a \in U,\ \mathrm{d}(gof)(a) = \mathrm{d}(g)(f(a))o\ \mathrm{d}(f(a))$.
3) $\forall a \in U,\ J_{gof}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$.
4) $\forall a \in U, \forall j \in [\![1,p]\!],\ \dfrac{\partial gof}{\partial x_j} = \mathrm{d}(g)(f(a)) \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right] = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \frac{\partial g}{\partial y_i}\big(f(a)\big)$.

Exercice 1

On définit deux fonctions :
- la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$,
- la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = (x+y, x-y)$.

1. Justifier que les fonctions f et g sont différentiables en tout vecteur $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et écrire la matrice jacobienne de f puis de g en (x,y).
2. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image d'un vecteur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $d(f \circ g)((x,y))$ en utilisant les deux méthodes suivantes :
   (a) en calculant $f \circ g$;
   (b) en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.

15.2.4 Cas particulier : dérivée le long d'un arc

Théorème

Si γ est une application définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ dérivable en t à valeurs dans E, et si f est différentiable en $\gamma(t)$ alors

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t).$$

Remarque : γ s'appelle un arc paramétré.

15.3 fonctions à valeurs réelles

On suppose que E a une structure euclidienne. Dans la pratique, $E = \mathbb{R}^p$.

15.3.1 Gradient

Théorème

Soit $f : U \subset \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ différentiable sur U. Pour tout $a \in U$ il existe un unique vecteur $v \in \mathbb{E}$ tel que $\forall h \in \mathbb{E}, df(a)(h) = (v \mid h)$ où $(\mid)$ est le produit scalaire usuel. Ainsi si $\mathcal{B}_p = (e_1, ..e_p)$ est une base orthonormée ,on a $\text{grad} f(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j} e_j$.

C'est une conséquence de la représentation des formes linéaires dans un espace vectoriel euclidien.
Exemple : calcul du gradient en coordonnées polaires : on écrit $f(x, y) = F(\rho, \theta)$...
on obtient

$$\text{Grad} f(a) = \frac{\partial F}{\partial \rho} u_\rho(\theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} u_\theta(\theta).$$

15.3.2 Extremum local

Définition extremum local

f admet un maximum local (resp minmum local) si et seulement si il existe un voisinage $V \subset U$ de a tel que

$$\forall x \in V, f(x) \leq f(a) \quad (resp\ \forall x \in V f(x) \geq f(a))$$

Théorème :condition nécessaire

Si f est différentiable sur un ouvert U à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si f admet un extremum local alors $\text{d}f(a) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})}$ ou encore $\text{grad} f(a) = 0$

15.4 Vecteurs tangents à une partie d'un espace vectoriel normé

Définition

Si X est une partie de E et x un point, un vecteur v de E est dit tangent à X en x, s'il existe $\epsilon > 0$ et un arc défini sur $]-\epsilon, \epsilon[$ dérivables en 0 à valeurs dans X, tels que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

remarque Il faut savoir se représenter cette définition : on dit que l'on trace un arc sur la partie X, attention l'hypothèse importante est à valeurs dans X

Définition représentation d'une fonction

Soit f de $U \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. la surface représentative de f est l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $z = f(x, y)$.

Définition :Plan tangent à une surface

Si f est différentiable en $a = (x_0, y_0)$ alors le plan tangent en $x_0, y_0, f(a)$ est le plan d'équation :

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - y_0) + f(a)$$

Théorème

Soit S la surface représentative d'une fonction f différentiable. Alors tous les vecteurs tangents en $x \in S$ sont inclus dans la plan tangent à S en x.

Théorème

Si f est une fonction à valeurs réelles définie et différentiable sur un ouvert de l'espace euclidien E, si X est une ligne de niveau de f, alors les vecteurs tangents à X en un point x de X sont orthogonaux au gradient en ce point.

15.5 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

15.5.1 définition

Définition

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U si f est différentiable en tout point de U et l'application $a \mapsto df(a)$ est continue sur U.

Théorème Very important

f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si f admet des dérivées partielles relativement à une base et si ces dérivées partielles sont continues sur U.

15.5.2 Propriétés algébriques

Théorème similaire au cas différentiable

Si f, g sont de classe $\mathcal{C}^1$ et B bilinéaire alors alors $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Si f, g sont de classe $\mathcal{C}^1$ et composables alors $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

15.5.3 Circulation d'une forme différentielle

Théorème

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans F, si γ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans U telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$ alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)).\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

Remarque : on retrouve ici le théorème de Physique qui dit : la circulation d'un champ de vecteurs qui dérive d'un potentiel est indépendant du chemin suivi, et nulle sur une lacet.

Théorème Caractérisation des fonctions constantes sur U connexe par arcs

Soit U un ouvert connexe par arcs de E. Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est constante si et seulement si sa différentielle est nulle sur U.

15.6 Fonctions de classes $\mathcal{C}^k$

Définition

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues

Théorème de Schwarz

Si $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^n)$ on a

$$\forall (j_1, j_2, .., j_k) \in [\![1, p]\!]^k,\ \forall \sigma \in \mathcal{S}_k,\ \forall a \in U, \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} ... \partial x_{j_1}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_{\sigma(k)}} ... \partial x_{j_{\sigma(1)}}}(a)$$

☞ ✠Ce qui justifiera que la matrice Hessienne est symétrique.
exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles
Résoudre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 - y^2$$

à l'aide du changement de variables $u = x + y$; $v = x - y$.

15.7 exercice de la banque

EXERCICE 33 analyse

On pose $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

EXERCICE 52 analyse

1. Prouver que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 - xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \end{array}$

(a) Quel est le domaine de définition de f ?
Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Justifier l'existence et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(c) Justifier l'existence et donner la valeur de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(d) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

EXERCICE 57 analyse

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de "f différentiable en $(0,0)$".
2. On considére l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

15.8 Vecteur tangent à une partie

15.8.1 Cas général

Définition

Soit X une partie d'une E et x un point de X. un vecteur v de E est dit *tangent* à X s'il existe un voisinage V de $0 \subset \mathbb{R}$ et γ un arc défini sur V à valeurs dans X, dérivable en 0, tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$. L'ensemble des vecteurs tangents en à X en x est noté $T_x(X)$.

exemples

1) La sphère d'un espace euclidien.

On note S la sphère de rayon 1 et soit $x \in E$ alors $T_x(S) = \text{Vect}(x)^\perp$. En effet on va montrer $T_x(S) \subset \text{Vect}(x)^\perp$.

Soit v un vecteur tangent à la sphère et γ un arc associé par la définition alors pour t suffisamment petit $\gamma(t) \in S$ (l'arc doit être inclus dans X.) Donc pour tout t : $\| \gamma(t) \|^2 = 1$ en dérivant le produit scalaire et en prenant la valeur en 0 on trouve $(\gamma(0), \gamma'(0)) = 0$ donc $(v, x) = 0$. d'où la première inclusion.

Soit v un vecteur non nul orthogonal à x alors on considère le plan $\text{Vect}(x, v)$ son intersection avec la sphère est un cercle passant x, on définit alors un arc (l'équation du cercle)

15.8.2 Hyperplan tangent à un ensemble

Théorème

Soit g une fonction numérique différentiable, alors on peut considérer $X = g^{(-1)}(\{0\})$ et soit $x \in X$ où la différentielle de g ne s'annule pas : $\mathrm{d}g(x) \neq 0$. Alors un vecteur $\vec{v}$ est tangent à X en x si et seulement si $\vec{v}$ appartient au noyau de la forme linéaire $\mathrm{d}(g)(x)$. On retiendra :

$$\text{si } X = g^{(-1)}(\{0\}) \text{ alors } T_x(X) = \ \text{Ker}(\mathrm{d}g(x)).$$

Remarque Si E est euclidien alors $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}g(x)) = \Big(\nabla(g)(x)\Big)^{\perp}$ donc un vecteur est tangent à X si et seulement si il est orthogonal au point de contact au gradient. On obtient alors l'équation de l'hyperplan H à la surface X définie par $g(x) = 0$ en x_0 :

$$\Big(\nabla g(x_0)\Big).(x - x_0) = 0.$$

(on a un produit scalaire le gradient est un vecteur)

15.9 Optimisation

Dans toute cette partie, les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Optimisation sous contrainte

Soient f et g deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies sur un ouvert U (Hyp 1) et de classe $\mathcal{C}^1$. On considère $X = g^{(-1)}(\{0\})$ l'ensemble des zèros de g et a un élément de X. On suppose que g est diffèrentiable en a avec $\mathrm{d}g(a) \neq 0$ (hyp 2) et si la restriction de f à X admet un extremum local, alors $\mathrm{d}f(a)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(a)$.

Méthode

Les contraintes sont définies à l'aide d'une fonction g et la fonction à étudier par une fonction f : bien les identifier.

On montre qu'il y a des extremums globaux par argument de compacité car X est fermé (image réciproque d'un fermé et borné)

On écrit le déterminant des dérivées partielles de f et g qui doit s'annuler.

On n'oublie pas l'équation des contraintes : un joli système.

On résout et enfin on détermine les extrema.

15.10 Etude du second ordre

Matrice Hessienne

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles. On appelle *Matrice Hessienne* de f au point a de U la matrice :

$$\mathcal{H}_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{(i,j)\in[1,n]^2}.$$

Dl d'ordre 2 d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ et $a \in U$; on a :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \Big(Gradf(a) \mid h\Big) + \frac{1}{2}\Big(\mathcal{H}f(a).h|h\Big) + o\Big(||h||^2\Big)$$

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + Gradf(a)^T h + \frac{1}{2} h^T \mathcal{H}f(a) h + o\Big(||h||^2\Big)$$

Application à l'étude des extremums locaux

Discussion suivant la matrice hessienne

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles.

Si f admet un minimum (resp maximym) local en un point a de U, alors a est un point critique de$f$ et la matrice hessienne $\mathcal{H}_f(a)$ est symétrique positive (resp $-\mathcal{H}_f(a)$ est symétrique positive.

Discussion suivant la matrice hessienne : réciproque

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles.

Si a est un point critique de f et la matrice hessienne $\mathcal{H}_f(a)$ est symétrique définie positive alors f admet un minimum local en a .

☞ Comme dans le cas des fonctions d'une variable, si le terme d'ordre 2 peut s'annuler on ne peut pas conclure.

Le cas $n = 2$

La matrice Hessienne est symétrique donc diagonalisable. Elle est positive si et seulement si les deux valeurs propres sont positives, et définie positive si et seulement si les deux valeurs propres sont strictement positive. Le déterminant donne le signe du produit des valeurs propres et la trace le signe de la somme.

Ex standard

Chercher les extrema locaux de la fonction f définie que $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y - 4)e^{x+y}.$$

Troisième partie

Probabilités

Chapitre 16

Introduction à la théorie des probabilités

Dans toute la suite Ω désigne un ensemble non vide.

16.1 Tribu

Définition

On dit que $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu si et seulement si

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

ii) $\forall A \in \mathcal{F}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{F}$

iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Prop Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur un ensemble non vide Ω

1) $\Omega \in \mathcal{F}$

2) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

3) $\mathcal{F}$ est également stable par union finie et intersection finie (heureusement)

Prop Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments d'un ensemble alors

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{A}_n \qquad \overline{A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bar{A}_n$$

$$B \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B \cap A_n) \qquad B \cup \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (B \cup A_n)$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

- Tableau de vocabulaire ensemble probabilité

Langage ensembliste	**langage des probabilités**
A est un élément de $\mathcal{F}$	A est un événement
A est vide	l'événement A est impossible
A est égal à Ω	l'événement A est certain
A est un singleton et $A \in \mathcal{F}$	A est un événement élémentaire
C est la réunion de A et B	C est l'événement "A ou B"
A est vide	l'événement A est impossible
C est l'intersection de A et B	C est l'événement "A et B"
C est la réunion de $(A_i)_{i\in I}$	C est l'événement "$\exists i \in I, A_i$ "
C est l'intersection de $(A_i)_{i\in I}$	C est l'événement "$\forall i \in I, A_i$ "
A et B sont disjoints	A et B sont **incompatibles**
A et B sont complémentaires	A et B sont des événements contraires
$(A_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω	$(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements

16.2 Axiome des probabilités

Définition espace probabilisé

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable.

On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{F})$ une application $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ vérifiant les conditions :

i) $P(\Omega) = 1$

ii) pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, la famille $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et on a

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$$

Pour $A \in \mathcal{F}$ le réel $P(A)$ est appelé la probabilité de l'événement A . Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est alors espace probabilisé

Remarque dans le cas des familles au plus dénombrables et donc aussi finie deux à deux incompatibles , on a la même propriété (σ-additivité), il suffit pour cela de considérer les familles infinies obtenus en ajoutant l'ensemble vide ....

conséquence de la σ-additivité

Prop Soit P une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$.
Pour tout couple d'événements disjoints A et B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

dans le cas général

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$

$A \subset B$ alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

continuité croissante

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.Une suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante pour l'inclusion** si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \subset A_{n+1}$$

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements . Alors

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

continuité décroissante

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.Une suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante pour l'inclusion** si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \subset A_{n-1}$$

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événements . Alors

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

On peut appliquer ce résultat dans le cas de suites non monotones. En effet, si on note $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ et $C_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_n$ alors (B_n) est croissante et (C_n) est décroissante. De plus, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_i$ (de même pour C_n) en appliquant limite croissante et limite décroissante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) = P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big).$$

$$\lim_{n\mapsto+\infty} P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big) = P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big).$$

Sous additivité (inégalité de Boole)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un univers probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que la série de terme général $P(A_n)$ converge alors

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n).$$

événement négligeable, événement presque sûr

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. Un événement A est dit négligeable lorsque $P(A) = 0$. Un événement A est dit presque sûr lorsque $P(A) = 1$.

propriétés des événements négligeables et des éléments presque sûrs

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé.

1. Une réunion au plus dénombrable d'événements négligeables est un événement négligeable :
2. Une intersection au plus dénombrable d'événements presque sûrs est un événement presque sûr :

16.3 Probabilité conditionnelle Indépendance.

C'est aussi un théorème

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et si B est un événement de probabilité NON NULLE alors le fonction P_B sur $\mathcal{F}$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$: la probabilité conditionnée à B

- On retrouve les formules du cours de sup qui demeurent essentielles

Système complet, quasi-complet

$(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω

$(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'événements si pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.

Formule des probabilités composées

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite d'événements tels que $P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) > 0$ alors

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)\dots P_{A_1\cap A_2\cap\dots A_{n-1}}(A_n)$$

Formule des probabilités totales

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors, pour tout $B \in \mathcal{F}$,

$$P(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{A_k}(B)P(A_k)$$

✽La formule précédente est encore valable pour un système quasi complet d'événements. En effet si $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est presque sur, A et $\bar{A}$ étant un système complet d'événements :

$P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap\bar{A})$ mais $B\cap\bar{A} \subset \bar{A}$ donc $P(B\cap\bar{A}) \leq P(\bar{A}) = 0$.

Formule de probabilités totales généralisées

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et soit $A \in \mathcal{F}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de A composées d'événements de probabilités non nulles. Alors, pour tout $B \in \mathcal{F}$, $P_A(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{A_k}(B)P_A(A_k)$

formules de Bayse

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et A et B deux événements de probabilités non nulles

$$P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)}P_A(B)$$

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. alors pour tout $B \in \mathcal{F}$ de probabilité non nulle :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{\sum_{k=0}^{+\infty} P_{A_k}(B)P(A_k)}$$

indépendance mutuelle, indépendance deux à deux

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

• Les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux indépendants si et seulement si

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \;\; P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

• Les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants si et seulement si pour tout sous-ensemble fini non vide I de $\mathbb{N}$

$$P(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $A \in \mathcal{F}$ tel que $P(A) > 0$ et $B \in \mathcal{F}$.

• Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

• Si A et B sont des événements indépendants alors il en est de même de (A et $\overline{B}$) et de ($\overline{A}$ et $\overline{B}$)

Des événements mutuellement indépendants sont indépendants deux à deux mais la réciproque est fausse.

Soient,$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ des événements mutuellement indépendants alors les événements A_1 et $\bigcap_{k\geq 2} A_k$ sont indépendants.

Toute famille $(A'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ où $A'_i = A_i$ ou $\overline{A}_i$ est mutuellement indépendantes

Chapitre 17

Variables aléatoires discrètes

17.1 Présentation

Définition.

Soit E un ensemble. Une *variable aléatoire discrète* définie sur Ω un espace probabilité à valeurs dans E est une application $X : \Omega \to E$ telle que

- $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
- Pour tout $x \in X(\Omega)$, l'image réciproque de $\{x\}$ par X, notée $(X = x)$ est un événement .

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, X est appelée variable aléatoire réelle discrète. Lorsque $E = \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^n$) , X est appelé couple de variables aléatoires réelles (ou vecteur aléatoire réel).

Définition.

Si X est un variable aléatoire discrète et A est une partie de E alors $X^{-1}(A)$ est un événement noté $(X \in A)$ i.e

$$(X \in A) = \{w \in \Omega \mid X(w) \in A\}.$$

Notation classique

$(X \geq a) = X^{-1}([a, +\infty[)$ et les autres....

On ne vous demandera pas de démontrer qu'une fonction est une v.a.

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

1) Si X est un variable aléatoire discrète définie sur Ω et f une application définie sur $X(\Omega)$, alors $f(X)$ est variable aléatoire discrète définie sur Ω

2) Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes sur Ω à valeurs dans E et F alors $Z = (X, Y)$ est une variable aléatoire discrète définie sur Ω à valeurs dans $E \times F$.

3) Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $X + \lambda Y$ et $X.Y$ sont des variables aléatoires discrètes .

Définition qui est aussi un théorème.

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans un ensemble E.

Le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X est la famille d'événements

$\{(X = x)\}_{x \in X(\Omega)}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire discrète est la donnée de

1) $X(\Omega)$

2) La valeur de $(P(X = x))$ pour tout élément dans $X(\Omega)$.

en d'autre termes , X variable aléatoire discrète définit la loi P_X et

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), P_X(A) = P(X \in A)$$

.

Attention si deux variables aléatoires discrètes définissent la même loi, cela ne signifie pas qu'elles sont égales, on dit que X et Y suivent la même loi , on note

$$X \sim Y$$

germe de probabilité - cas d'une variable aléatoire discrète .

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable , $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble infini dénombrable , les x_n étant deux à deux distincts.

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de réels positifs et telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = x_n) = p_n$$

C'est aussi un th et on enfonce toujours les portes ouverts

Si X est une variable aléatoire discrète et f une fonction de $X(\Omega)$ dans F alors on définit la variable aléatoire discrète $f(X)$ et c'est bien une variable aléatoire discrète . De plus, si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

Loi conditionne sachant un événement

Si X est une variable aléatoire discrète et $A \in \mathcal{F}$ un événement, on définit la loi conditionnelle de X sachant A par :

$$\forall x \in X(\Omega), P(X = x \mid A) = P\Big(X^{-1}\{(x)\} \mid A\Big).$$

17.2 Lois usuelles premières approches

La loi uniforme

On dit que la variable aléatoire discrète suit une loi uniforme sur un ensemble fini E si

$$X(\Omega) = E \text{ et } \forall x \in E, P(X = x) = \frac{1}{n} \text{ avec } n = card(E).$$

Exemple : on lance un dé à six faces équilibré , X est la valeur du dé alors $X \sim \mathcal{U}(6)$.

La loi de Bernoulli

On dit que la variable aléatoire discrète suit une loi de Bernoulli de paramètre p (avec $p \in]0,1[$) si

$$X(\Omega) = \{0,1\}, P(X=0) = 1-p \text{ et } P(X=1) = p.$$

Exemple pour lancer d'une pièce déséquilibrée

Exemple : tirage dans une urne contentant 24 boules blanches et 56 boules noires, alors la probabilité d'avoir une blanche est $p = 24/80$. Si X vaut 1 quand la boule est blanche est 0 sinon ,on a $X \sim \mathcal{B}(3/10)$.

La loi binomiale

On dit que la variable aléatoire discrète suit une loi binomiale de paramètre n et p (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$) si

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0,n]\!], P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

17.3 Couple de variables aléatoires.

Définition

On appelle **couple aléatoire discret** un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Si les deux variables aléatoires sont réelles, on parle de **vecteur aléatoire** de $\mathbb{R}^2$.

Si (X,Y) est un couple aléatoire discret, on appelle **loi conjointe de X et Y** la loi du couple (X,Y) c'est à dire la probabilité $P_{X,Y}$ définie sur $(X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega) \times Y(\Omega)))$ par

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P_{X,Y}(\{x,y\}) = P(X=x \text{ et } Y=y).$$

On appelle **lois marginales du couple** (X,Y) les lois de X et de Y

Théorème : Lien loi marginale loi du couple

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

1) La loi conjointe détermine les lois marginales par :

$$\forall x \in X(\Omega),\ P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P((X,Y)=(x,y))$$

2) Les lois marginales ne déterminent pas les lois conjointes.

Remarque Sans autre hypothèse, on ne peut pas déterminer les lois des couples, par ex la loi X donne le nombre de pigeons dans mon jardin le dimanche et la loi Y qui donne le nombre de malades du covid le même jour ne permettent pas de trouver la loi du couple. Mais, on peut supposer (par bon sens) que ces lois sont indépendantes (surtout sans cette hypothèse il est impossible de faire la suite des calculs). Conclusion :

☞Soit les lois ont été supposées indépendantes et c'est indiqué dans l'énoncé.

☞Soit la loi du couple est donnée par magie (voir exo ccinp)

☞Soit X et Y sont des lois construites à partir d'une expérience et souvent c'est loi de X conditionnée par Y qui est connue.

Loi conditionnelle ou conditionnée

Si $P(Y=y)\neq 0$ alors, on définit sur $X(\Omega)$ la loi conditionnelle de X sachant $(Y=y)$ par

$$P(X=x \mid Y=y)=\frac{P((X,Y)=(x,y))}{P(Y=y)}$$

on obtient à partir des ces germes :

$$P(X\in A \mid Y=y)=\frac{P(X\in A, Y=y)}{P(Y=y)}$$

Hyper classique

la connaissance de la loi de X et de la loi conditionnelle de Y sachant $X=x$, permet de déterminer la loi conjointe.

17.4 Indépendance de variables aléatoires.

Définition

Soit (X,Y) un couple aléatoire discret, défini sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$ à valeurs dans un ensemble E. Les variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si et seulement si

1) $(X,Y)(\Omega)=X(\Omega)\times Y(\Omega)$

2)

$$\forall (x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega),\quad P\left((X,Y)=(x,y)\right)=P(X=x).P(Y=y).$$

Remarque : Le 1) suffit parfois à démontrer que 2 lois ne sont pas indépendantes, par ex $\mathrm{Min}(X,Y)$ et $\mathrm{Max}(X,Y)$ (sans cas extrêmes).

Proposition

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall A\subset X(\Omega),\ \forall B\subset Y(\Omega),\ P\left((X,Y)\in A\times B\right)=P(X\in A).P(Y\in B).$$

autrement dit

si X et Y sont indépendantes alors les événements $(X\in A)$ et $(Y\in B)$ sont indépendants et ceci pour tout A et B

✖On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$. De plus si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors pour totues fonctions f et g $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$

Hyper classique

Si les lois sont indépendantes alors la loi conjointe de (X,Y) est déterminée par les lois marginales

Définition

On dit que les variables aléatoires $X_1, X_2, .., X_n$ sur Ω sont mutuellement indépendantes (ou indépendantes) si et seulement si
pour tout $(x_1, x_2, .., x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots X_n(\Omega)$;

$$P\left((X_1, X_2, \dots X_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = i)$$

Proposition

$X_1, X_2, .., X_n$ sur Ω sont mutuellement indépendantes si et seulement si

$$\forall A_k \subset X_k(\Omega),\ P\left((X_1, X_2, \dots X_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots A_n\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_k \in A_k).$$

Lemme des coalitions

Si $X_1, X_2, .., X_n$ sur Ω sont mutuellement indépendantes alors pour tout $m \in [\![1, n-1]\!]$ et toutes les fonctions f de $X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots X_m(\Omega)$ dans F et g de $X_{m+1}(\Omega) \times \dots X_n(\Omega)$ dans G, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et
$g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

17.5 Suite de variables aléatoires indépendantes

Moralement : on a de droit de jouer au jeu de pile ou face infini car on a le droit de considérer une suite de variable aléatoire discrète de Bernoulli indépendantes de même paramètre.

Définition

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de variables aléatoires discrètes. On dit que c'est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout $K \subset I$ fini non vide, $K = \{k_1, \dots, k_n\}$ les variables aléatoires $X_{k_1}, \dots, X_{k_n}$ sont mutuellement indépendantes.

Proposition

Soit $\mathcal{L}$ la loi d'une certaine variable aléatoire. Il existe au moins un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel il existe une suite (X_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes et qui sont toutes de loi $\mathcal{L}$.

17.6 Moments d'une variable aléatoire

17.6.1 Espérance d'une variable aléatoire

Définition : légèrement différente du cas fini

Soit X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, l'espérance de X est la

somme, dans $[0,+\infty]$ de la famille $\Big(xP(X=x)\Big)_{x\in X(\Omega)}$.

✠

Proposition : deuxième formule de l'espérance

Pour une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ on a

$$E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(x\geq n).$$

Proposition

Si X est à valeurs positives alors $E(X)\geq 0$.

Proposition

1) Si les variables X et Y admettent des espérances , il en est de même de $X+Y$ et de λX où $\lambda\in\mathbb{R}$

2) L'ensemble de variables aléatoires qui admettent une espérance est un espace vectoriel et l'espérance est une forme linéaire.

3) Soient X et Y deux variables aléatoires qui admettent des espérances et telles que $X\leq Y$ alors $E(X)\leq E(Y)$

Espérance cas général

Une variable aléatoire discrète complexe X est dite d'espérance finie si la famille $\Big(xP(X=x)\Big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable et si tel est le cas, la somme est l'espérance de X. On note L^1 l'ensemble des variable aléatoire discrète d'espérance finie.

Proposition

Si $|X|\leq Y$ et Y est d'espérance finie alors X aussi

formule de transfert

Soit X une variable aléatoire discrète , f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs complexes ; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(P(X=x)f(x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Si tel est le cas

$$E(f(X))=\sum_{x\in X(\Omega)}P(X=x)f(x).$$

Espérance de deux variables aléatoires indépendantes

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes et admettant chacune une espérance finie. Alors, la variable aléatoire XY admet une espérance finie et

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

.

17.6.2 Variance, écart type, covariance

Proposition bien utile dans la suite

Si $E(X^2) < +\infty$ alors X est d'espérance finie.

Définition

On dit qu'une variable aléatoire discrète X admet un moment d'ordre $r \geq 1$ (r un entier)si et seulement si X^r admet une espérance. Dans ce cas le moment d'ordre r de X est :

$$m_r(X) = E(X^r) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r P(X = x)$$

.

On note L^2 l'espace des variable aléatoire discrète qui admettent un moment d'ordre 2. Le premier théorème de cette section montre que $L^2 \subset L^1$. Cela se généralise :

Proposition

Si une variable aléatoire discrète X admet un moment d'ordre $r \geq 1$ alors elle admet un moment d'ordre k pour tout $k \leq r$.

Proposition

Soit X une variable aléatoire discrète admet un moment d'ordre $r \geq 1$.alors la variable aléatoire réelle discrète $X - E(X)$ admet un moment d'ordre r

Remarque ce qui justifie certaines définitions voir plus loin

Inégalité de Cauchy Schwarz

Si les variables X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2 alors XY admet une espérance finie et

$$(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

De plus l'égalité est obtenue si et seulement si X et Y sont presque partout colinéaires :

$$\exists \lambda \, \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } P(\lambda X + \mu Y \neq 0) = 0$$

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète qui admet un moment d'ordre 2. On appelle **variance de** X on note $V(X) = E[(X - E(X))^2]$. On appelle **écart type de** X et on note $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Proposition

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2 et λ un réel alors
1) $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$
2) $V(X + \lambda) = V(X)$

Formule de Koenig-Huygens

Si X une variable aléatoire discrète qui admet un moment d'ordre 2 alors
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Proposition

Si X est une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2 et de variance non nulle alors la variable aléatoire discrète $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite

Proposition

L'ensemble $L^2(\Omega, P)$ des variables réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2 définies sur (Ω, P) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

17.6.3 Covariance

Formule de Koenig-Huygens

Si X et Y sont deux variables aléatoires qui admettent des moments d'ordre 2, alors $(X - E(X))(Y - E(Y))$ admet une espérance et on a

$$E\Big((X - E(X))(Y - E(Y))\Big) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Covariance

Si X et Y sont deux variables aléatoires qui admettent des moments d'ordre 2, on appelle (**covariance de** X **et** Y **le réel**

$$Cov(X, Y) = E\Big((X - E(X))(Y - E(Y))\Big) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Si de plus $\sigma(X) \neq 0$ **et** $\sigma(Y) \neq 0$ **, on définit le coefficient de corrélation de** X **et de** Y **par**

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Proposition

Cov est une forme bilinéaire symétrique sur l'espace $L^2(\Omega, P)$.

Proposition

1) Soient X et Y sont deux variables aléatoires qui admettent des moments d'ordre 2 alors on a

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$$

2) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires qui admettent des moments d'ordre 2 alors on a

$$V(X_1 + \ldots X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i \leq n} Cov(X_i, X_j).$$

Proposition

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes admettant des moments d'ordre 2 alors

$$Cov(X,Y) = 0 \qquad \text{et} \qquad E(XY) = E(X)E(Y).$$

On retiendra que si les deux variables sont indépendantes alors le coefficient de corrélation est nul.

Proposition

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires qui admettent des moments d'ordre 2, deux à deux indépendantes alors on a

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

17.7 Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres.

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire discrète positive admettant une espérance. On a

$$\forall r > 0, P(X \geq r) \leq \frac{E(X)}{r}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychez

Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2

$$\forall \epsilon > 0, P(|\ X - E(X)\ | \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

17.7.1 Loi faible de grands nombres

loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes de même loi , deux à deux indépendantes, ayant un moment d'ordre 2 et soit $m = E(X_n)$, l'espérance commune des X_n et $\sigma = \sigma(X_n)$ l'écart type commun des X_n.

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ on a

1) $\forall \epsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$

2) $\forall \epsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

17.7.2 Fonctions génératrices

Dans toute cette partie les variables aléatoires sont à valeurs dansℕ.

Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Sa fonction génératrice G_X est la la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable t.

Théorème

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On note R_X le rayon de convergence de sa fonction génératrice G_X

- $R_X \geq 1$
- G_X est définie sur $[-1, 1]$ parfois plus.
- G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R_X, R_X[$ et on a $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$

La démonstration de ce théorème est le sujet de l'exo ccp 111

Théorème

$G_X = G_Y$ si et seulement si X et Y ont la même loi
Attention : même loi ne veut pas dire même variable aléatoire.

Théorème

On a , pour tout $t \in]-R_X, R_X[$, $G_X(t) = E(t^X)$
Voir encore exo 111 ccp !

Théorème

1) Si X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 et, dans ce cas, $E(X) = G'_X(1)$
2) X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si G_X est dérivable deux fois en 1 et, dans ce cas, $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$

Théorème

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires deux à deux indépendantes, et $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ alors

$$\forall t \in [-1,1],\ G_S(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t)$$

.

17.8 Lois usuelles formulaire

Formulaire bien utile pour les calculs de somme

Nom	Somme	convergence
Série géométrique	$\sum_{n=0}^{+\infty} p^n = \frac{1}{1-p}$	$p \in]0,1[$
Série géométrique dérivée	$\sum_{n=0}^{+\infty} np^{n-1} = \frac{1}{(1-p)^2}$	$p \in]0,1[$
Série géométrique dérivée seconde	$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)p^n = \frac{2}{(1-p)^3}$	$p \in]0,1[$
Série exponentielle	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$	$x \in \mathbb{R}$

Sans oublier la "petite formule"

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

• **Loi de Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$
$p \in]0,1[$, support est $\{0,1\}$, probabilités élémentaires $P(X=0) = 1-p$ et $P(X=1) = p$, espérance p, Variance $p(1-p)$, Fonction génératrice $1-p+px$
Loi d'une expérience succès échec.
• **Loi géométrique** $\mathcal{G}(p)$

Loi du premier succès lors d'une succession d'expériences de Bernoulli , indépendantes,de même loi, $p \in]0,1[$, support est $\mathbb{N}^*$, probabilités élémentaires $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$, espérance $1/p$, Variance $\dfrac{1-p}{p^2}$, Fonction génératrice $\dfrac{px}{1-(1-p)x}$

Loi dite sans mémoire voir exo de référence.

• **Loi binomiale** $\mathcal{B}(n,p)$

La somme de n expériences succés échec indépendantes de même paramétre .

$p \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ support est $\{0,1,\dots n\}$, probabilités élémentaires $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$, espérance np, Variance $np(1-p)$, Fonction génératrice $(1-p+px)^n$

• **Loi de Poisson** $\mathcal{P}(\lambda)$

$\lambda \in]0,+\infty[$, support $\mathbb{N}$, probabilités élémentaires $P(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, espérance =variance=λ, Fonction génératrice $e^{\lambda(x-1)}$