

Listes des démonstrations et exercices classiques à savoir refaire

Prérequis

Dans le cadre des espaces euclidiens (et même préhilbertiens pour certains)

- La démonstration de Cauchy Schwarz
- Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie alors $F \oplus F^\perp = E$, et on connaît alors une expression de la projection orthogonale sur F notée p :

$$\text{Si } \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p \text{ est une base orthonormée de } F \text{ alors } \forall x \in E \quad p(x) = \sum_{i=1}^p (x | \vec{e}_i) \vec{e}_i.$$

- Conséquence du précédent : Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors

$$\forall x \in E \quad d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|.$$

Point clef de la démonstration : Pythagore.

- Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ alors en notant $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de u dans $\mathcal{B}$, on a $\forall i, \forall j, a_{i,j} = (u(\vec{e}_j) | \vec{e}_i)$
- La démonstration du théorème de représentation des formes linéaires car elle illustre beaucoup la méthode classique : les espaces sont de même dimension donc injectivité=surjectivité=bijektivité.
- (option) : la démonstration de l'existence et l'unicité de u^* .
- Si F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u^* . (***)

Les endomorphismes symétriques

- Théorème spectral savoir citer le théorème sur les endomorphismes (et c'est une équivalence) : u

est diagonalisable en base orthonormée ou $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)}^\perp E_\lambda = E$ ainsi que la forme matricielle : $PAP^T = D$.

Et pour la démonstration savoir au minimum que c'est une démonstration par récurrence avec deux points clefs : si F est stable alors $F^\perp$ stable et que la restriction d'un endomorphisme auto-adjoint est encore auto-adjoint.

- Redémontrer sans (***) que si F est stable par u autoadjoint alors $F^\perp$ est stable par u .
- L'équivalence suivante Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ alors on a l'équivalence $\forall x \in E, (u(x) | x) \geq 0 \iff \text{Sp}(u) \subset [0; +\infty[$ (les valeurs propres sont positives). (auquel cas on note $u \in \mathcal{S}^+(E)$).
- B Dans le sens indirect on a besoin du théorème spectral.
- Complément vu en exo . Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ alors :

$$\forall x \in E \quad \lambda_{\min} \|x\| \leq (u(x) | x) \leq \lambda_{\max} \|x\|.$$

- Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoint.
- Complément de cours Soit p une projection ; p est une projection orthogonale ssi $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Les isométries vectorielles

On part de la définition de la conservation des normes

- $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si u conserve le produit scalaire. (formule de polarisation)
- $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si il existe une base orthonormée dont l'image est une base orthonormée. (au moins le sens direct qui est très facile mais permet de comprendre la suite .
- $u \in \mathcal{O}(E)$ alors la matrice de u dans une base orthonormée vérifie $A^T = A^{-1}$, ou encore les colonnes sont orthonormées (ou les lignes)
- Valeurs possibles des valeurs propres de $u \in \mathcal{O}(E)$ (facile mais si on oublie $x \neq 0$ cela vaut 0 point)
- Si F est stable par $u \in \mathcal{O}(E)$ alors $F^\perp$ aussi (sans utiliser (***)).

Cette liste sera complétée la semaine prochaine par des exercices classiques (mais les résultats ne sont pas à connaître par coeur)