Exercice

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' - 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Soit f une solution de (E), on pose alors pour tout $x > 0$, $g(x) = e^{-x}f(x)$, à l'aide de g déterminer toutes les solutions de (E).
3. Démontrer que toute solution de (E) admet un prolongement à $[0, +\infty[$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice

On donne, pour $x > 0$, l'équation différentielle

$$y' - y + \frac{1}{x} = 0.$$

1. (a) Montrer qu'il existe sur l'intervalle $]0, +\infty[$ une unique solution Y_0 bornée quand x tend vers l'infini et exprimer $Y_0(x)$ sous forme d'une intégrale.
- (b) Quelle expression donner à la solution générale Y_λ , où $\lambda \in \mathbb{R}$, l'indexation étant telle que pour $\lambda = 0$, on ait la solution bornée Y_0 ? Étudier le comportement de $Y_\lambda(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
2. On note $\mathbb{C}_\lambda$ la courbe représentative de la solution Y_λ .
Pour tout point $m(x_m, y_m)$ du demi-plan $x > 0$, on note Y_m la solution de l'équation vérifiant $Y_m(x_m) = y_m$ et $\mathbb{C}_m$ sa courbe représentative.
 - (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{H}$ des points m tels que $Y_m'(x_m) = 0$. Même question pour l'ensemble $\mathcal{I}$ des m tels que $Y_m''(x_m) = 0$. Tracer une allure de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{I}$.
 - (b) Quelle est la place de la courbe $\mathbb{C}_0$ représentative de la solution Y_0 par rapport aux courbes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{I}$?
 - (c) Tracer sur un même dessin des ébauches des courbes $\mathcal{H}$, $\mathcal{I}$, $\mathbb{C}_0$, $\mathbb{C}_{\lambda_1}$, $\mathbb{C}_{\lambda_2}$, où λ_1 et λ_2 sont des réels respectivement négatif et positif.