CCP 2016 MP : Maths 1

Exercice I

On considère l'équation différentielle $(E) \quad : \quad x^2y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$.
Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ $(r > 0)$ de $\mathbb{R}$?

CCP 2014 MP : Maths 1

DEUXIÈME EXERCICE

a et b étant deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on note l'équation différentielle :

$$(E) : \quad x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

On note S^+ l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et S^- l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel S des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1. Donner la dimension des espaces S^+ et S^-.

2. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où f_I désigne la restriction de f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de f à l'intervalle J.
Donner le noyau de l'application φ et en déduire que $\dim S \leq 4$.

3. Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où

$$(E) : \quad x^2y'' + xy' = 0.$$

Determiner S^+ et S^-.
Determiner ensuite S et donner sans détails la dimension de S .

4. Dans cette question $(E) : \quad : x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$.
Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (α réel).
En déduire S^+ puis S^-.
Determiner S et donner la dimension de S.

5. Donner un exemple d'équation différentielle du type $(E) : \quad x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ tel que $\dim S = 0$ (on détaillera).
On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

CCP 2011 MP : Maths 1

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $(E) : 2xy' - 3y = \sqrt{x}$.

1. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.

2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

CCP 2005 MP : Maths 1

DEUXIÈME EXERCICE

Pour n entier naturel non nul, on considère l'équation différentielle linéaire :

$$(E_n) \quad xy' - ny = 0.$$

1. Donner l'espace vectoriel des solutions de l'équation (E_n) sur chacun des intervalles $I =]-\infty, 0[$ et $J =]0, +\infty[$.
2. Dans le cas où $n = 1$, déterminer uniquement par des considérations graphiques, l'espace vectoriel des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?
3. Dans le cas où $n \geqslant 2$, déterminer avec soin l'espace vectoriel des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?

SESSION 2009

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

MPM1002

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices ***sont autorisées.***

* * *

NB: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.

EXERCICE 1

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad xy' + y = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \quad .$$

1. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $]-1;0[$ et $]0;1[$.
2. En déduire que (E) admet une unique solution sur $]-1;1[$.

EXERCICE 2

1. Justifier que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   Dans la suite de cet exercice, on se propose de calculer :

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$