Problème 1.

partie I Série de fonctions

On définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n+1}.$$

1) Si $x > 0$, la série est grossièrement divergente, si $x = 0$ on reconnait la série harmonique alternée qui est convergente d'après le TSSA, pour $x > 0$ on a

$$|f_n(x)| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann référencée convergente, par comparaison de série à termes positifs, $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est absolument convergente.

$$\underline{I = [0, +\infty[.}$$

2) On a :

$$\forall n \geq 0,\ ||f_n||_{\infty,I} = \frac{1}{n+1}.$$

(par monotonie évidente) Or, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}$ est référencée divergente, donc

$$\underline{\sum_{n\geq 0} f_n(x) \text{ ne converge pas normalement sur } I.}$$

3) Notons que pour $x \geq 0$ la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ vérifie les trois hypothèses du théorème des séries alternées : le terme général converge vers 0, est alterné en signe et décroît en valeur absolue. On sait alors que la série est convergente et

$$\forall x \geq 0,\ \forall n \geq 0\ |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+2}.$$

On a un majorant du reste donc $||R_n||_{\infty,I} \leq \frac{1}{n+2}$, le reste converge uniformément vers 0 donc

$$\underline{\sum_{n\geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur } I.}$$

4) On peut appliquer le théorème du cours d'inversion limite et somme et le théorème de continuité de la somme . En effet, on a vu la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ (question 3) et

$\forall n \geq 0$ f_n est continue sur I et $\forall n \geq 1$ (piège hyper classique) $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = 1$

$$\underline{S \text{ est continue sur } I \text{ et } \lim_{x\to+\infty} S(x) = 1.}$$

Partie II Equations différentielles

On étudie l'équation différentielle $y' - y = -\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ sur $[0, +\infty[$

5) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1 (pour les puristes $x \mapsto -1$ est continue)

$$\underline{S_H = \text{ Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^x)}$$

6) On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^x$ où λ sera une fonction dérivable.

On obtient

$\lambda'(x)\mathrm{e}^x = -\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ ou encore $\lambda'(x) = -\frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$ on obtient une primitive par le théorème fondamental de l'analyse, on choisit par exemple

$$\lambda(x) = \int_0^x -\frac{1}{\mathrm{e}^u + 1}\mathrm{d}u.$$

L'ensemble des solutions s'écrit

$$\underline{S = \{x \mapsto \big(\lambda + \int_0^x -\frac{1}{\mathrm{e}^u+1}\mathrm{d}u\big)\mathrm{e}^x\}}$$

Partie II Un calcul d'intégrale impropre

7)L'impropreté est en $+\infty$ et

$\dfrac{1}{\mathrm{e}^u+1} \underset{u\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-u}$ cette dernière est référencée intégrable en $+\infty$, par comparaison de fonctions positives

$$\underline{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^u+1} \text{ est (absolument) convergente.}}$$

Si l'on veut avoir une limite finie en $+\infty$ (l'énoncé demande une condition nécessaire) il faut choisir $\lambda = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{e^u+1}$ pour avoir une forme indéterminée.

$$\underline{x \mapsto (\int_x^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^u+1}\mathrm{d}u)\mathrm{e}^x \text{ est la seule solution qui peut tendre vers une valeur finie en } +\infty}$$

8) On écrit

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+1} - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = 1 - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$$

Les deux sont d'intégration immédiate ($\dfrac{u'}{u}$ pour la seconde)

$$\underline{\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{e^u+1} = -x + \ln(1+\mathrm{e}^x)}$$

9) Le cours permet d'écrire une primitive comme le reste d'une intégrale convergente donc

$$\underline{S = \{x \mapsto \big(\lambda + \int_x^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^u+1}\mathrm{d}u\big)\mathrm{e}^x\}}$$

$$\underline{S = \{x \mapsto \big(\lambda - x + \ln(1+\mathrm{e}^x)\big)\mathrm{e}^x\}}$$

On souhaite montrer que S est également solution de cette équation différentielle sur $]0,+\infty[$. On note pour $x > 0$ $g(x) = \mathrm{e}^{-x}S(x)$.

10) On utilise le théorème de dérivation termes à termes (sur des intervalles adaptés à la situation), chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$, la convergence simple $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ a été vue ,

$$\forall n \geq 0, f_n'(x) = -\frac{n}{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)x}$$

Soit $a > 0$, $\forall x \in [a,+\infty[$ $|f_n'(x)| \leq \mathrm{e}^{-(n+1)a}$ donc $||f_n||_{\infty,[a,+\infty[} \leq \mathrm{e}^{-(n+1)a}$ terme général d'une série convergente. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

Donc S est dérivable sur $]0,+\infty[,\forall x > 0$, on on a. $g'(x) = \mathrm{e}^x(S'(x) - S(x)$, on regroupe les deux sommes convergentes, on obtient une somme géométrique.

$$\underline{g \text{ est dérivable et } \forall x > 0, g'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.}$$

11) On a $\forall x > 0,\ \ S(x) = \mathrm{e}^x g(x)$ donc $S'(x) - S(x) = g'(x)\mathrm{e}^x = -\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = -\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

Donc S est solution de l'équation sur $]0,+\infty[$, il a été vu que S admettait une limite finie en $+\infty$ (=1) . (Q4). On sait qu'il n'existe au plus qu'une fonction vérifiant cela (Q6) et on connait son expression Q9.

Finalement

$$\underline{\forall x > 0, S(x) = \mathrm{e}^x\Big(\ln\big(\mathrm{e}^x+1\big) - x\Big).}$$

Par continuité de la fonction S et de l'expression de droite, la formule précédente est encore valable en 0.

On trouve

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Remarques : la dernière formule permet de vérifier que l'on n'a pas fait de faute de signe
On ne peut pas invoquer le th de Cauchy-Lipschitz pour l'unicité d'une solution avec condition en $+\infty$.

Problème

Étude d'une fonction définie comme une intégrale dépendant d'un paramètre

1.] Soit $x \geqslant 0$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\left|\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ l'est aussi .

   On pose $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \quad x \geqslant 0.$

2. $h(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan x\,]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$

3. La fonction $(x,t) \longmapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[\,\times\,[0,+\infty[$ et elle est dominée par la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$. Le théorème de continuité des fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre donne la continuité de h sur $[0,+\infty[$.

4. Pour tout $x > 0$ on a $|h(x)| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$, donc h tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
   (*on peux le faire avec le théorème de la convergence dominée...*)

5. Les hypothèses de continuité par morceaux en t et classe $\mathcal{C}^2$ en x ne pose pas de problème. Sur $]0,+\infty[\,\times\,]0,+\infty[$ et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$$

   Soit $a > 0$, on a $\forall x \in [a+\infty[\ \left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \dfrac{t^2 e^{-at}}{1+t^2} = \varphi(t)$, la fonction φ est intégrable (déjà vue). Donc h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ pour tout $[a,b] \subset\,]0,+\infty[$ par suite h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et

$$h''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

6. Soit $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} h''(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{(t^2+1-1)e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x} - h(x) \end{aligned}$$

   d'où $h''(x) + h(x) = \dfrac{1}{x}$.

7. On a une équation différentielle d'ordre 2, linéaire. L'ensemble des solutions est un sous-espace affine de dimension 2 de direction les solutions de l'équation homgène dont une base est cos ,sin
   Donc

$$S = \{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu(sin(x)) + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \mid \lambda,\mu \text{ réels}\}$$

   On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *de fonctions définies sur l'intervalle* $[0,+\infty[$ *par:*

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [0,+\infty[\,,\ u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto e^{-nx}$ est décroissante sur $[0,+\infty[$, donc $\sup_{x\in[0,+\infty[} |u_n(x)| = \dfrac{1}{1+n^2}$, la série$\sum \dfrac{1}{1+n^2}$ converge donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Quelques propriétés de la fonction u

9. La série de fonction $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement , donc uniformément, sur $[0,+\infty[$ et les fonctions u_n sont continue sur $[0,+\infty[$, le théorème de continuité des série de fonctions assure la continuité de u sur $[0,+\infty[$.

10. La série de fonction $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement , donc uniformément, sur $[0,+\infty[$ et $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, le théorème d'interversion de limite et somme donne :

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$$

11. Les fonction u_n sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et $u_n''(x) = \dfrac{n^2e^{-nx}}{1+n^2}$.
Soit $a>0$ la serie $\sum_{n\geq 1} u_n''$ converge normalement et uniformément sur $[a,+\infty[$, donc u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,,+\infty[$ et et $u''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2e^{-nx}}{1+n^2}$

12. Soit $x>0$, on a

$$\begin{aligned} u''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^2+1-1)e^{-nx}}{1+n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \\ &= \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - u(x) \end{aligned}$$

d'où

$$u''(x) + u(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

13. Il suffit de citer le cours Σ_0 est de dimension 2 dont une base est la famille $(\cos,\sin)$.

14. (a) f est continue sur I donc les fonctions $t\mapsto f(t)\cos t$ et $t\mapsto f(t)\sin t$ sont continues ,d'après le théorème fondamental de l'analyse φ_1 et φ_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\varphi_1'(x) = f(t)\cos t$ et $\varphi_2'(x) = f(t)\sin t$ pour tout $x\in I$.

(b) Soit $x\in I$,on a

$$\begin{aligned} \varphi_{f,x_0}(x) &= \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{x_0}^{x} f(t)(\sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t)\mathrm{d}t \\ &= \sin(x)\int_{x_0}^{x} f(t)\cos(t)dt - \cos(x)\int_{x_0}^{x} f(t)\sin(t)dt \\ &= \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x \end{aligned}$$

Et $\varphi_{f,x_0}(x_0) = 0$.

(c) φ_1 et φ_2 sont dérivables sur I donc φ_{f,x_0} l'est aussi et

$$\begin{aligned} \varphi_{f,x_0}'(x) &= \varphi_1'(x)\sin x + \varphi_1(x)\cos x - \varphi_2'(x)\cos x + \varphi_2(x)\sin x \\ &= f(x)\cos x.\sin x \ + \varphi_1(x)\cos x - \ f(t)\cos .x\sin x + \varphi_2(x)\sin x \\ &= \varphi_1(x)\cos x + \varphi_2(x)\sin x \end{aligned}$$

Ainsi $\varphi_{f,x_0}'(x_0) = 0$.

(d) φ_1 et φ_2 sont dérivables sur I donc φ'_{f,x_0} est dérivable sur I par suite φ_{f,x_0} est deux fois dérivable sur I et

$$\begin{aligned}\varphi''_{f,x_0}(x) &= \varphi'_1(x)\cos x - \varphi_1(x)\sin x + \varphi'_2(x)\sin x + \varphi_2(x)\cos x\\ &= f(x)\cos^2 x \ - \varphi_1(x)\sin x + \ f(t)\sin^2 x + \varphi_2(x)\cos x\\ &= f(x) + \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x\\ &= -\varphi_{f,x_0}(x) + f(x)\end{aligned}$$

ainsi φ_{f,x_0} est solution, sur I, de l'équation différentielle $(\mathcal{L}_f)$

(e) Le théorème de structure de Cauchy, donne l'existence et l'unicité d'un problème de Cauchy.

15. C'est encore du cours déguisé.
16. Par IPP fait 3 fois en classe cette année
17. **Analyse :**

(a) On suppose que ψ est une solution, sur $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle $(\mathcal{L}_f)$ ayant 0 pour limite en $+\infty$.
Soit $x \in]0,+\infty[$, d'après 15 avec $x_0 = 1$, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_1^x \frac{\sin(x-t)}{t}\mathrm{d}t\\ &= \lambda\cos x + \mu\sin x + \sin x\int_1^x \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t - \cos x\int_1^x \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\\ &= \left(\lambda - \int_1^x \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\cos x + \left(\mu + \int_1^x \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\sin x\end{aligned}$$

(b) ψ tend vers 0 en $+\infty$ donc les deux suites $(\psi(2n\pi))_{n\geqslant 1}$ *et* $\left(\psi\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right)_{n\geqslant 1}$ convergent vers 0 en $+\infty$. On a

$$\psi(2n\pi) = \lambda - \int_1^{2n\pi} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t \ \text{ et } \ \psi\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = (-1)^n\left(\mu + \int_1^{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right)$$

par passage à la limite en $+\infty$ on obtient

$$\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t \quad \text{ et } \quad \mu = -\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t.$$

(c) On déduit de ce qui précède que

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left(\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t - \int_1^x \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\cos x + \left(-\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t. + \int_1^x \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\sin x\\ &= \cos x\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t - \sin x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

18. **Synthèse :** d'après la question précèdente on a

$$\psi_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\ \mathrm{d}t = \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_1^x \frac{\sin(x-t)}{t}\mathrm{d}t$$

avec $\lambda = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ et $\mu = -\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t$, donc ψ_1 est solution de $(\mathcal{L}_f)$ sur $]0,+\infty[$.
Et aussi

$$\psi_1(x) = \cos x\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t - \sin x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t$$

donc

$$|\psi_1(x)| \leq \left|\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right| + \left|\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right|$$

les deux intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t$ convergent donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t =$ 0 d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\psi_1(x) = 0$.
Ainsi ψ_1 est solution, sur $]0,+\infty[$, de $(\mathcal{L}_f)$ et elle admet 0 pour limite en $+\infty$.