Pour mardi

Soit A une matrice symétrique définie positive.
1) Que peut-on dire du spectre de A ? Donner différentes versions du théorème spectral.
2) Soit $X' = BX$ un système différentielle à coefficient constant. On considère $V \in E_\lambda$ sous espace propre associé à une valeur propre λ. Montrer que $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}V$ est solution du système.
3) Montrer que pour tout solution du système différentiel $X' = AX$, l'application $t \mapsto ||X(t)||_2$ est croissante.

Pour mercredi

1) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p. Montrer que $I_n, N, \dots, N^{p-1}$ est libre.
Exprimer

$$\exp\Big(t(\lambda I_n + N)\Big).$$

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant pour unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $N - \lambda I_n$ est nilpotente.
Montrer que les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$ si et seulement si λ est imaginaire pur et $A\lambda I_n$.
3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique :

$$(X - \lambda_1)n_1 \dots (X - \lambda_2)^{n_1}$$

les λ_k étant deux à deux distincts. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A. Montrer que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{n_k}.$$

En déduire l'existence d'une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs.
d) Avec les notations de 3), montrer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées si et seulement si les λ_k sont imaginaires purs et que A est diagonalisable.
e) Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Pour jeudi : ccinp 2023

On définit la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^2$

6. Établir que $e^{-x} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$
7. Démontrer que f admet un unique point critique (x_0, y_0) sur $\mathbb{R}^2$
8. À l'aide de la matrice Hessienne, démontrer que f admet un extremum local en (x_0, y_0). Est ce un minimum ou un maximum ?

Vendredi

On note Γ la courbe d'équation $x^3 + y^3 = 1$.
Déterminer le maximum de $f : (x, y) \mapsto xy$ sur Γ.