MP2

Année 2022

Polycopié révision 2024

Mode d'emploi

☞ A la fin vous trouverez le polycopié de l'année dernière

☞ Les oraux blancs sont au moins pour les deux premières semaines sous le format cciinp : 25 minutes de préparation, un exercice de la banque plus un original (mais finalement pas vraiment original). La liste des exos de la banque à réviser est donnée la semaine précédente , pour la première revoir 1 à 14, 59 à 67, 95 à 98.

1 Groupes et algèbre linéaire sans réduction

mines telecom 2017

Considérons $H=\left\{AB-BA/(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2\right\}$.
1. Démontrer que l'application trace tr : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ est une forme linéaire non nulle.
2. Notons $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $E_{i,j}E_{k,\ell}$.
3. Démontrer que pour tout $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$. En déduire que $\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})=H$.
4. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \varphi(AB)=\varphi(BA)$.
Démontrer que $(\varphi,\operatorname{tr})$ est une famille liée. 5. Déterminer un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$.

ccinp 2012

Soit E un espace vectoriel normé de dimension 3. Considérons un endomorphisme f de E, non nul. Supposons que $f^3=0$. Il existe alors trivialement un vecteur $e_1\neq 0$ tel que $f^2(e_1)\neq 0$. Posons $e_2=f(e_1)$ et $e_3=f(e_2)$.
1. Prouvez que la famille (e_1,e_2,e_3) est une base de E.
2. Soit u un endomorphisme de E tel que $u\circ f=f\circ u$.
Démontrez qu'il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $u=a\operatorname{Id}_E+bf+cf^2$. Réciproque?

mines telecom2021

Les groupes $(\mathbb{Z},+)$ et $\mathbb{Q},+$ sont-ils isomorphes ?

ccinp 2021

Soient $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(\mathbb{U}_n, \times)$ le groupe multiplicatif des racines n-ième de l'unité.

1. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m$.
2. $G = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{U}_n$ est-il un groupe multiplicatif ?
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un polynôme T_n à coefficients entiers, de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1w} telque
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad , \cos(nx) = T_n(\cos(x)).$$
4. En déduire que $\dfrac{3+4i}{5}$ est un complexe de module 1 qui n'appartient pas à G.

tpe eivp 2016

Soient E un ensemble et $(G, .)$ un groupe. Soit $\phi : G \to E$ une bijection. Pour tout $x, y \in E$, on pose
$$x \star y = \phi\big(\phi^{-1}(x).\phi^{-1}(y)\big).$$
Montrer que $\star$ est une loi de groupe. Montrer que $(E, \star)$ et $(G, .)$ sont isomorphes.

ccinp 2017

Soient G et G' deux groupes notés multiplicativement.On suppose que le groupe G est cyclique engendré par un élément a.

1. Soit b un élément de G'. Montrer qu'il existe un morphisme $\varphi : G \to G'$ vérifiant $\varphi(a) = b$ si et seulement si, b est d'ordre fini divisant celui de a.
2. Combien y-a-t-il de morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$?
Et de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$
3. Combien y-a-t-il de morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$?

2 Réduction

Algèbre

On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que son polynôme caractéristique est $(X-1)^2(X+1)$.
2. Est-elle diagonalisable ?
3. Montrer qu'elle est semblable à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Algèbre

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs

$$A = \begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & O \end{pmatrix}$$

(a) Calculer A^2.
(b) La matrice A est-elle diagonalisable? Déterminer les valeurs propres de A et les dimensions de ses espaces propres?

Algèbre

Soient E l'espace des suites réelles convergeant vers 0 et $\Delta : E \to E$ l'endomorphisme défini par

$$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \Delta(u)(n) = u(n+1) - u(n)$$

Déterminer les valeurs propres de Δ.

ccinp 2021 6445

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. (a) Si $u^2 = 0$, montrer que $\mathrm{rg}(u) \leq \dfrac{n}{2}$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leq \dfrac{n}{2}$. Donner un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = 2$.
2. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u et v commutent.
   (a) Montrer que si u admet n valeurs propres distinctes, alors u et v admettent une base commune de diagonalisation.
   (b) Montrer que si u et v sont diagonalisables alors u et v admettent une base commune de diagonalisation.

classique

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\chi_J = X^n - 1$. Déterminer les éléments propres de J.
2. Exprimer K en fonction de J.
3. Montrer que J et K commutent. En déduire que la matrice $D(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & & b \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c \\ c & & b & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Déterminer ses éléments propres.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. On pose

$$\Gamma_f = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid uof = fou\}$$

a) Montrer que Γ_f est une sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$
b) Montrer que $u \in \Gamma_f \implies \forall \lambda \in Sp(f), E_\lambda(f)$ est stable par u.
c) en déduire la dimension de Γ_f.

Soit $V = \{u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \mid \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})), \quad u(M^T) = \quad (u(M))^T\}$
a) Quelle est la structure de V ?
b) Quelle est la dimension de V ?

Algèbre

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'ayant aucune valeur propre en commun.
(a) Montrer que $\chi_A(B)$ est une matrice inversible.
(b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$AX - XB = M$$

Soit f un endomorphisme de E de dimension 3 tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.
Soit $e_1 \notin \ker f^2$, on pose $e_2 = f(e_1)$, $e_3 = f(e_2)$.
1) montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E.
2) montrer que $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $uof = fou \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{K}^2,\ u = aId + bf + cf^2$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $f(M) = Tr(A)M + tr(M)A$
1) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
2) Trouver les éléments propres de f.
3) f est il diagonalisable ?

Algèbre

Soient

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$$

et $m \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^5\right)$ canoniquement associé à M.

(a) En procédant à un calcul par bloc, déterminer $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = I_5$. En déduire que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$.

(b) Déterminer un vecteur $x \in \mathbb{R}^5$ tel que $x, m(x), m^2(x), m^3(x)$ et $m^4(x)$ forme une base de $\mathbb{R}^5$.

Quelle est la matrice de m dans cette base ?

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie .
1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable $) \Longrightarrow (u^n$ diagonalisable $)$.
2) Donner et démontrer une inclusion entre $\ker(u - \lambda Id_E)$ et $\ker(u^n - \lambda^n Id_E)$.
3) Soient u et v des endomorphismes de E diagonalisables tels que $u^3 = v^3$ montrer que $u = v$.
4) est ce toujours vrai sans l'hypothése de diagonalisabilité ?

Algèbre

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $\varphi(P) = P - (X+1)P'$.
(a) Justifier que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
(b) Déterminer les valeurs propres de φ et justifier que φ est diagonalisable.

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = a$.
Sans calcul : A est elle inversible ? , Diagonalisable ?
Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$
Trouver deux polynômes annulateurs de A linéairement indépendants.

Saint-Cyr 2013

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Calculer B^k pour $k \in \mathbb{N}$.
2. Supposons B diagonalisable. Prouver que A est diagonalisable. Réciproque?
3. Supposons A inversible et diagonalisable. Montrer que B est diagonalisable.
4. On choisit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -A - I_3 & -A + I_3 \\ A - I_3 & A + I_3 \end{pmatrix}$. La matrice C est-elle diagonalisable?

Indication : on pourra s'aider de $P = \begin{pmatrix} I_3 & -I_3 \\ I_3 & I_3 \end{pmatrix}$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et$B = \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

1) trouver Sp(A)
2) Trouver Sp(B)
3) montrer que $B \in GL_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow n \wedge p$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels
polynôme caractéristique de A. A est elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
Soit λ un réel non nul. $B = A + \lambda I_3$ est elle inversible ?

Montrer qu'il existe 3 réels α, β, γ tel que $B^{-1} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$.
1) déterminer $\ker f$
2) f est il surjectif ?
3) Trouvez une base de $\ker f$ et une base de $Im(f)$.

On considére la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel.
1) quel est le rang de A ? La matrice est elle inversible ?
2) A est elle diagonalisable ?

3 espace euclidien

classique

Soit E l'ensemble des suites réelles de carrés sommables c'est-à-dire les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Pour $(u, v) \in E^2$, on pose $\varphi(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

ccinp 2021 6401

Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $\varphi : (f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur F.
5. Montrer que :

$$\forall P \in E, \left| \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t \right| \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t}.$$

classique

Soit a un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien E. À tout réel α, on associe l'application

$$\phi_\alpha : E \longrightarrow E, \quad x \mapsto x + \alpha(x \mid a)a.$$

1. Montrer que $C = \{\phi_\alpha ; \alpha \in \mathbb{R}\}$ est stable par composition, et commutatif pour la loi $\circ$.
2. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, \phi_\alpha$ est un endomorphisme symétrique de E.
3. Montrer que, si $\alpha \neq 0$, alors 1 et $1+\alpha$ sont les valeurs propres de ϕ_α. Quels sont les sous-espaces propres associés?
4. Montrer que, si $\alpha \neq -1$, alors ϕ_α est inversible dans C. Quelle est la nature de ϕ_{-1} ?
5. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que ϕ_α soit une isométrie. Quelle est la nature de ϕ_{-2}?

TPE/EIVP 2016

Considérons $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Démontrer qu'il existe un unique $A \in E$ tel que : $\forall P \in E, P(0) = \displaystyle\int_0^1 P(t)A(t)\mathrm{d}t$.
2. Démontrer que $\deg(A) = n$.

Indication de M PLD : le plus dur est de trouver le chapitre ! oui c'est produit scalaire et forme linéaire

ccinp 2023

On considère le produit scalaire suivant sur $\mathbb{R}[X]$

$(P \mid Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$

1) Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2) Calculer (X^p, X^q) pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
3) Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $F = \mathbb{R}_2[X]$.

telecom 2014

I. Soit $R = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & a \\ 2/3 & 2/3 & b \\ -1/3 & 2/3 & c \end{pmatrix}$.

1. Déterminer a, b, c pour que R soit une rotation.
2. Trouver l'axe et l'angle de cette rotation.

ccinp 2023

Soit $n \geq 2$. on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $F = \{\begin{pmatrix} x_1 \vdots x_n \end{pmatrix} \mid x_1 = x_n\}$

1) Montrer que F est un hyperplan, trouver une base orthonormée de F.
2) Déterminer $F^\perp$
3) Ecrire la matrice de la projection orthogonale de F sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
4) Calculer $\mathrm{d}(e_1, F)$.

Agèbre

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On pose

$$k = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|.$$

Vérifier

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq k\|x\|$$

Algèbre

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique à valeurs propres strictement positives. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^4 \leq \langle u(x), x\rangle \left\langle u^{-1}(x), x\right\rangle$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.

Algèbre

On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini par

$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que la relation

$$u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)\mathrm{d}t$$

définit un endomorphisme u de l'espace E.
(b) Vérifier que l'endomorphisme u est symétrique
(c) Calculer la trace de u.

ccinp 2023

Soit $n \geq 2$. on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $F = \{\begin{pmatrix} x_1 \vdots x_n \end{pmatrix} \mid x_1 = x_n\}$
1) Montrer que F est un hyperplan, trouver une base orthonormée de F.
2) Déterminer $F^\perp$
3) Ecrire la matrice de la projection orthogonale de F sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
4) Calculer $\mathrm{d}(e_1, F)$.

ccinp 2023

Soit E un espace euclidien de dimension n. On fixe deux vecteurs u et v de E.
1) Pour tout vecteur x de E, on pose

$$(u \otimes v)(x) = (v \mid x)u$$

a) Justifier que $(u \otimes v)$ est linéaire et donner son rang.
b) Déterminer les éléments propres de $(u \otimes v)$

c) L'endomorphisme $(u \otimes v)$ est-il diagonalisable ?
2) Calculer $\big(u \otimes v\big)^2$ et retrouver le résultat précédent.
3) Soit g un endomorphsime de E. On note g^* son adjoint.
Montrer que g commute avec $(u \otimes v)$ si et seulement si il existe un réel α tel que : $g(u) = \alpha u$ et $g^*(v) = \alpha v$.

ccinp 2023

Soit E un espace euclidien de dimension n. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoajoint de E.
1) Soit $v \in \mathcal{S}(E)$ tel que $\forall x \in E\ (v(x) \mid x) = 0$, montrer que $v = 0$.
2) Montrer que tout projecteur orthogonal de E est autoadjoint. Montrer que tout projecteur de $\mathcal{S}(E)$ est un projecteur orthogonal.
3) Soient $u_1, \dots, u_p \in \mathcal{S}(E)$ tels que $rg(u_1) + \cdots + rg(u_p) = n$ et

$$\forall x \in E,\ \sum_{i=1}^{p} (u_i(x) \mid x) = (x \mid x).$$

a) Montrer que $u_1 + \cdots + u_p = Id_E$
b) Montrer que $\mathrm{Im}(u_1) \oplus \dots \mathrm{Im}(u_p) = E$.
c) Montrer que pour tout $i \in [1, p]\!]$ u_i est la projection sur $\mathrm{Im}(u_i)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u_1) \oplus \dots \mathrm{Im}(u_{i-1} \oplus \mathrm{Im}(u_{i+1} \dots \mathrm{Im}(u_p)$

4 analyse

4.1 Suites numériques

ccinp 2021 6433

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \frac{a_n}{1 + a_n} \text{ et } c_n = \frac{1}{1 + n^2 a_n}.$$

1. (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
   (b) Montrer que pour n suffisamment grand, $a_n \leq 2b_n$.

   (a) Montrer que si $\sum b_n$ converge alors $\sum a_n$ converge.
   (b) Montrer que si $\sum c_n$ diverge alors $\sum a_n$ converge ou bien diverge.

2. On admet que la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{1 + n^2 x}$ admet un minimum sur $[0, +\infty[$ en $\dfrac{n-1}{n^2}$.
   (a) Montrer que si $\sum a_n$ converge alors $\sum c_n$ converge.
   (b) Montrer que si $\sum a_n$ diverge alors $\sum c_n$ converge ou bien diverge.

classique

1. Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent de

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

2. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a-t-elle un sens?

3. Montrer qu'alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+t^3)^n} dt$.

1. Établir l'existence de u_n.

2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

3. Prouver la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$.

Soit $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1} \right) - \ln(n)$.

1. Donner un équivalent de $u_{n-1} - u_n$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge. On note α sa limite.

2. Etudier la nature des séries $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n (u_n - \alpha)$ et $\displaystyle\sum_{n} \frac{1}{n^{u_n}}$.

3. Proposer un équivalent simple de $u_n - \alpha$.

mines telecom 2019

Déterminer en fonction de a la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$.

Analyse

Soient α un réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$$

1. On suppose que $\alpha > 1$. Démontrer que la suite (u_n) converge vers 0 .
2. Déterminer, en discutant selon la valeur de α, la limite de la suite (u_n).

ccinp 2017 mp

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \pi$ -périodique, continue sur $[0, \pi]$, vérifiant $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = 0$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_0^\pi f(x)e^{-\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x \quad \text{ et } \quad v_n = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x$$

Justifier que u_n et v_n sont bien définis.
2. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = a_n u_n$.
3. Démontrer que $a_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{\pi}$.
4. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi xf(x)\mathrm{d}x$.
indicaiton de M PLD : l'existence de a_n ne pose pas de problème mais il faut pour la question 3 avoir une expression de a_n à l'aide d'une somme, je pense qu'il faut passer vite sur la relation de Chasles, pour la fin introduire une primitive de notée F afin de faire une intégration par parties.

4.2 Suite et séries de fonctions

ccinp 2021 6458

Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = \dfrac{(t^2-1)^{n+1}}{n+1}$.

1. Donner le domaine de définition D de $\sum f_n$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.
3. Etudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0, 1]$.
4. Etudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0, 1]$.
5. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(t^2-1)^{n+1}}{n+1}\mathrm{d}t$?
6. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

classique

Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$.
Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément mais pas $\left(f_n^2\right)_n$.

mines mp 2002

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $u_n(x) = \dfrac{1}{n + n^3x^2}$.
1. Démontrer la convergence simple de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Prouver la convergence normale de $\sum u_n$ sur tout intervalle $[a, +\infty[$, $a > 0$. Y a-t-il convergence normale sur $]0, +\infty[$?
3. Soit S la somme de la série $\sum u_n$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x)$.
4. Déterminer un équivalent de S au voisinage de $+\infty$.

Pour $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x + n}$.

1. Démontrer la convergence simple de la série de terme général f_n.
2. On note $f(x)$ la somme des $f_n(x)$ pour $n \geqslant 0$.La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}_+^*$? dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$?
3. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

ensea mp 2018

Pour $x > 0$, on pose

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

1. Démontrer que la fonction g est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer $g'' + g$, en déduire une équation différentielle vérifiée par g.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

1. Soit $\delta \in]0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression simplifiée de $S_n(\delta) \underset{\text{def}}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\delta)$. Exhiber un réel $M(\delta)$ indépendant de n tel que $|S_n(\delta)| \leqslant M(\delta)$.
2. On pose $u_n(\delta) = \dfrac{\sqrt{n}}{n-1} \cos(n\delta)$ pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$.
   (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$.
   (b) Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, \pi]$. On pourra écrire $\cos(n\delta) =$

$S_n - S_{n-1}$.

3. Étudier la convergence uniforme sur un segment inclus dans $]0, \pi]$.

Probabilité

On pose pour $x > 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

Après avoir justifié l'existence de f donner sa limite en $+\infty$ et un équivalent en 0.

ccinp 2013

Soit $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n \cos^n(x)}{1+n}$.

1. Étudier les divers modes de convergence de la série de terme général $\sum f_n$ sur $[0, \pi/2]$.
2. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)\mathrm{d}x$.
3. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sous forme d'une intégrale.

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, on définit f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin^n(x)\cos(x)$.

1. Etudier la convergence simple.
2. Etudier la convergence uniforme.

1. Convergence simple de la suite définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f_n(x) = n(\cos(x))^n \sin(x)$.
2. Y a-t-il convergence uniforme sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$? Sur $\left[a, \dfrac{\pi}{2}\right]$?
3. Montrer que, pour g continue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} g(t) f_n(t)\, dt = g(0)$.

Analyse

On pose

$$u_n(x) = (-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x \text{ pour } x \in \left]0;1\right] \text{ et } u_n(0)=0.$$

(a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

(b) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0;1]$.
(c) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Analyse

Pour $x > -1$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

a) Montrer que S est définie et continue sur $]-1,+\infty[$.
b) Calculer $S(x+1)-S(x)$ en déduire un équivalent de S en -1.

Navale 2013

Posons $u_n(x) = \dfrac{x}{(1+n^2x)^2}, x \in \mathbb{R}_+$. Déterminer les modes de convergence de la série $\sum u_n$ (simple, uniforme, normale). La somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

analyse

Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+nx^2}.$$

Montrer que S est définie sur $]0,+\infty[$ et qu'elle y est continue. Déterminer la limite en $+\infty$ de S puis un équivalent en $+\infty$.

4.3 série entière

1. Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} S_n x^n$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2. Exprimer sa somme f à l'aide de fonctions usuelles (on pourra poser $A_n = \sum_{k=0}^{n} x^n$ et remarquer que $x^n = A_n - A_{n-1}$.

classique transformation du rayon

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence R' de la série entière $\sum \frac{n! a_n}{n^n} z^n$.

ccinp 2006 PC

On pose $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n+1}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 \leq a_n \leq n^2$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
3. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$; trouver une équation différentielle satisfaite par f.
4. Comment peut-on déterminer les coefficients $(a_n)_n$?

4.4 Equations différentielles

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ et $u_0(x) = 1$.

1. Donner le rayon de convergence de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que S vérifie une équation différentielle du type $y'' + ay' + by = f$ où l'on précisera f et les réels a et b.
3. Intégrer l'équation et en déduire S.

Analyse

On considère l'équation différentielle

$$\big(\ln(x)\big)y' + \frac{y}{x} = 1.$$

a) Résoudre l'équation différentielle sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
b)Soit g la fonction définie sur $]-1, +\infty[\setminus\{0\}$ par

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Montrer que g se prolonge en une fonction sur $]1, +\infty[$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
c) Démontrer que l'équation admet une solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

analyse

On fixe dans cet exercice un réel $\lambda \in]-1,1[$. On note Ω l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développables en série entière et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x) + f(\lambda x).$$

Montrer qu'il existe des fonctions non nulles dans Ω. Montrer qu'il en existe une seule prenant la valeur 1 en 0 (on la notera g). Décrire Ω à l'aide de g.

Analyse

On considère l'équation différentielle

$$(t^2+1)y'' - 2y = t.$$

a) Déterminer une solution polynomiale non nulle φ de l'équation homogène associée.
b) Résoudre l'équation homogène en procédant au changement de fonction inconnue

$$y(t) = \varphi(t)z(t).$$

c) Résoudre l''équation avec second membre.

Analyse

On considère l'équation différentielle

$$y" + q(x)y = 0$$

où q est une fonction à valeurs positives non nulle. On souhaite montrer par l'absurde que toute solution s'annule.
Soit f une fonction qui ne s'annule pas.
a) Justifier que f est de signe constant.
sans perte de généralités on suppose dans la suite que f est strictement positive.
b) Etudier le signe de $f"$ et faire un dessin de la situation.
Conclure.

ccinp 2021

Soit l'équation différentielle :

$$(E) \quad (x^2-4x)y' + (2-x)y = 4.$$

.

1. Trouver une solution de (E) sous forme polynomiale.
2. Résoudre (E) sur chaque intervalle $]-\infty,0[,]0,4[$ et $]4,+\infty[$.
3. Trouver les solutions de (E) sur $]-\infty,4[$ et $]0,+\infty[$ et sur $\mathbb{R}$.

ccinp 2018

Soit l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x(x+2)y' + (x+1)y - 1 = 0$$

.

1. Calculer la dérivée de $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
2. Résoudre (E) sur$]0, +\infty[$.
3. Chercher les solutions développable en série entière sur $]-2, 2[$.
4. résoudre E sur $[0, +\infty[$.

ccinp 2018

Soit $\lambda > 0$. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad xy' + \lambda y = \frac{1}{1+x}$$

définie sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer que (E) admet une unique solution qui admet une limite finie en 0^+.
2. Chercher les solutions développable en série entière au voisinage de 0.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)}$.

mines telecom 2018

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$ est solution de l'équation différentielle :
$$(E) \quad y''(x) + y(x) = f(x).$$
2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifiant $\varphi'' + \varphi \geq 0$. Montrer que $\varphi(x+\pi) + \varphi(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pourra poser $f = \varphi'' + \varphi$.

Mines telecom 2018

Déterminer les fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout réel x.

eivp 2015

Soit $\alpha \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$ bornée. Considérons $(\mathcal{E}) : xy' - y + \alpha(x) = 0$.
1. Déterminer une solution Y telle que $\lim\limits_{+\infty} Y' = 0$.
2. Supposons que $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Calculer la limite de Y en $+\infty$.

Analyse

On considère l'équation différentielle

$$y" + y = \frac{1}{x}$$

a) Résoudre l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$
b)En déduire une expresion de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

4.5 Intégrales à paramètres

ccp 2016

Notons

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xu} \ln(u) \mathrm{d}u.$$

1. Déterminer le domaine de définition J de g.
2. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et expliciter sa dérivée.
3. Démontrer que pour tout $x \in J, xg'(x) + g(x) = -\frac{1}{x}$.
4. Résoudre l'équation différentielle et exprimer $g(x)$ en fonction de $g(1)$.

Soit la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt) - \arctan(t)}{t} dt$.

1. (a) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) La fonction F est-elle continue et dérivable ?
2. En déduire une expression simplifiée de F.
3. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(at) - \arctan(bt)}{t} dt$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} dt$.

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Calculer $F(1)$.
3. Calculer $F(x)$ pour tout x.

4.6 Plusieurs variables

ccinp 2021 6531

Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire usuel), à valeurs propres strictement positives.

1. Montrer qye $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \langle f(h), h\rangle > 0$.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ fixé. On pose $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle.$$

   (a) Montrer que g est différentiable et calculer dg.
   (b) Montrer que g admet un unique point critique z_0 et que $z_0 = f^{-1}(u)$.
   (c) Montrer que g est un minimum global de z_0.

ccinp 2021

1. Justifier la diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de vecteurs propres.
2. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' &= & x + 2z \\ y' &= & y \\ z' &= & 2x + z \end{cases}$

classique

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. En déduire la valeur de $\exp(tA)$.
3. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$.

Indication :
2. Poser $N = A - I_3$ et calculer $\exp(tN)$ en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton.
3. Appliquer directement la formule avec l'exponentielle de matrice.

5 Probabilité

ccinp 2023

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un univers probabilisé fini.Soient (X, Y) deux variables aléatoires.
Soit $(i, j) \in \{1, \ldots, n+1\}^2$. On définit

$$a_{i,j} = P(X = i, Y = j) = \frac{1}{2n} \text{ si } \mid i + j - (n+2) \mid = 1 \text{ et } 0 \text{ sinon }.$$

1) Montrer que $\left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in\{1,\ldots,n+1\}^2}$ définit une loi de probabilité de couple.
2) Expliciter A, la matrice dont les coefficients sont les $a_{i,j}$ et montrer que A est diagonalisable.
3) Donner les lois marginales de X et Y.
4) On pose $b_{i,j} = P(X = i \mid Y = j)$ les coefficients d'une matrice B.
Exprimer B et montrer que $v = \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X+2) \\ \vdots \\ P(X=n+1) \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B

Mp 2016

Considérons une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, chacune suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$. Notons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad S_n^* = \frac{1}{\delta S_n}\left(S_n - E\left(S_n\right)\right) \quad \text{avec} \quad \delta S_n \text{ l'écvart-type de } S_n$$

1. Rappeler l'espérance, la variance et la fonction génératrice de chaque X_k.
2. Déterminer l'espérance, la variance et la fonction génératrice de S_n.
3. (a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n^*.
(b) En admettant son existence, démontrer que la fonction génératrice $G_{S_n^*}$ de S_n^* vérifie sur son ensemble de définition:

$$G_{S_n^*}(t) = \frac{G_{S_n}\left(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)}{t\sqrt{n}}.$$

(c) Déterminer un développement limité à l'ordre 2 lorsque $n \to +\infty$ de $t^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$.
En déduire la limite lorsque $n \to +\infty$ de $G_{S_n^*}(t)$.

escp

Soit $n \geq 2$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, et suivant la loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$. On considère a un entier de $[\![1, n]\!]$, et Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leq a \\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > a \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Y (vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité).
2. Calculer l'espérance de Y et la comparer à l'espérance de X_1.
3. Pour quelles valeurs de a cette espérance est-elle maximale?
Situation pratique : on lance un D10; si on fait 5 ou moins, on a le droit de relancer le dé.
Indication :
1. Raisonner par disjonction de cas, suivant que $X_2 > a$ ou non.
2. Exprimer $E(Y)$ sous la forme d'une somme de termes positifs ne dépendant pas de a, et d'un terme négatif dépendant de a. Il faut rendre ce terme le plus petit possible!

ccinp 2023

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on considère les deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$ dont la loi du couple est donnée par

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2 \; P(X=i, Y=j) = \lambda \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}.$$

1) Montrer que $\lambda = \dfrac{1}{4^n}$.
2) Déterminer les lois marginales de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?
3) Déterminer l'espérance et la variance de X.
4) Soit $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $b_{i,j} = P(X=i, Y=j)$
Justifier que B est diagonalisable. En calculant B^2 déterminer les valeurs propres de B et donner la dimension des sous-espaces propres associés?

proba

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles suivant toutes deux la loi d'une variable aléatoire X, on suppose X bornée.
On suppose que $X_1 + X_2$ suit la loi de variable $2X$.
Montrer que $P\big(X_1 = X_2\big) = 1$.

proba

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N (avec $N \geq 2$). Dans cette urne on opère des tirages consécutifs (avec remise) jusqu'à l'obtention d'une série de k boules identiques ($k \geq 2$) On admet qu'il est presque sûr que ce processus s'arrête et on note T la variable aléatoire déterminant le nombre de tirages opérés à l'arrêt du processus .
1) Déterminer $P(T=k)$ et $P(T=k+1)$.
2) Soit $n \geq 1$, établir que

$$P(T = n+k) = \frac{N-1}{N^k} P(T > n).$$

c) En déduire que la variable aléatoire admet une espérance et déterminer celle-ci

classique

On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.
1. Donner la loi de X. En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Classique

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.
1. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.
3. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n} p_n$. Qu'en pensez-vous?

proba

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce ayant la probabilité $p \in]0,1[$ de tomber sur Pile. On note X la longueur de la première série de lancers identiques et Y la longueur de la seconde série. Par exemple $X(PPFFFP...) = 2$ et $Y(FFPPPF...) = 3$.
a) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
b) Calculer les espérances de X et Y.

proba

Soient (U, V) un couple de variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$
a) Montrer que la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in]0,1[$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
b) On pose $S = (U-1)^2 + (V-1)^2$, déterminer la loi de S.
c) On pose $T = (U-1)(V-1)+1$. Calculer $E(S(T-1))$. Déterminer la loi de T. Calculer la covariance de (S, T).

6 Année 2022

ccinp 2022

Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endormorphismes antisymétriques c'est à dire
tel que $u^* = -u$.
Soit la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt) - \arctan(t)}{t} dt$.

1. (a) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) La fonction F est-elle continue et dérivable ?
2. En déduire une expression simplifiée de F.
3. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(at) - \arctan(bt)}{t} dt$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

ccinp 2022

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{2} a_i X^i$ et $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{2} b_i X^i$,

on pose $(P \mid Q) = \displaystyle\sum_{i=0}^{2} a_i b_i$ on admet que $(.|.)$ définit un produit scalaire.
On pose $F = \{P \in E, P(1) = 0\}$.
1) F est-il un sous-espace vectoriel de E ? Si oui, donner une base de F.
2) Soit $P = X$. Déterminer $\mathrm{d}(P, F)$. On pourra chercher une base orthonormée de F.

ccinp 2022

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x^2n^2}$ où $x \in \mathbb{R}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de S ?

2) Montrer la continuité de S.

3) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

4a) Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\mathrm{d}t$ pour $x \in]0, +\infty[$.

☞ On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4b) Donner un équivalent de S en 0.

ccinp 2022

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $a^2 + b^2 \neq 0$ et $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$.

1) Calculer MM^T. En déduire $\det(M)$

2) Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, montrer que $\mathrm{rg}(M) = 4$.

Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$, montrer que $\mathrm{rg}(M) = 2$.

3) Soit $w \in \mathbb{C}, w = b^2 + c^2 + d^2$. Quelles sont les valeurs propres de M ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

ccinp 2022

On considére l'équation différentielle :

$$4xy" + 2y' - y + 0 \quad (E).$$

Trouver l'unique solution développable en série entiére à l'origine respectant la condition $y(0) = 1$.

ccinp 2022

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1) Soit p un projecteur (p linéaire et $p^2 = p$). Montrer $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$ et que p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ de direction $\mathrm{Ker}(p)$.

2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = 0$ et $f + g \in GL(E)$ si et seulement si $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im(f)}$.

ccinp 2022

Soit E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n et u l'endomorphsime de E qui à $P(X)$ associe $P(1-X)$.
1) Calculer $u \circ u$. En déduire les valeurs propres de u. Que peut-on dire de u ?
2) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Que peut-on dire sur le graphe de f si $f(1-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

3) En déduire les espaces propres de u. Est-ce que u est diagonalisable ?

ccinp 2022

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que F est définie sur $]0, +\infty[$.
2) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.
3) Calculer F' sur $]0, +\infty[$.
4) Calculer F sur $]0, +\infty[$.

ccinp2021

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme symétrique de E.

1. Soit p un entier naturel impair.
   (a) Montrer l'existence d'un endomorphisme symétrique v tel que $v^p = u$. (On pensera à la matrice représentative de u.)
   (b) Montrer que v possède les mêmes sous-espaces propres et le même nombre de valeurs propres distinctes que u.
   (c) Montrer que u est l'unique endomorphisme symétrique v tel que $v^p = u$
2. Soit p un entier naturel impair.
   (a) A-t-on les mêmes résultats ?
   (b) Que peut-on dire si u est positif ? (c'est à dire $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$)
   (c) Que peut-on dire si u et v sont positifs ?

ccinp 2022

Soit E un espace euclidien de dimension non nulle.
1) Montrer que si p est un projecteur orthogonaux alors p est auto-adjoint.
2) Soient p et q deux projecteurs orthogonaux.
a) Montrer que $p \circ q \circ p$ est un endomorphisme auto-adjoint.
b) Montrer que $\Big(\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)\Big)^{\perp} = \mathrm{Im}(q) \bigcap \mathrm{Ker}(p)$.
c) Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

ccinp 2022

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge.

2) En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(t)}{t+\cos\,(t)}\mathrm{d}t$ converge.

ccinp 2022

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1) Justifier que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$.

2a) Énoncer des propriétés polynômiales de diagonalisation de matrices.
2b) On suppose que B est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable, puis que $A = 0$.
3) Trouver une CNS sur A pour avoir : A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

ccinp 2022

On note f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f : M \mapsto aM + bM^T$ où a et b sont des réels.
1) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme directe de l'espace $\mathcal{S}$ des matrices symétriques et de l'espace $\mathcal{A}$ des matrices antisymétriques.
2) Exprimer f en fonction de p, q, où p est la projection sur $\mathcal{S}$ parallèlement à $\mathcal{A}$ et q la projection sur $\mathcal{A}$ parallèlement à $\mathcal{S}$.
3) Exprimer f^2 en fonction de f et Id.
4) Donner une CNS sur a et b pour que f soit un automorphime et exprimer f^{-1} en fonction de f et Id.

ccinp 2022

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soient F et G deux polynômes de degré $n+1$. On note f l'application qui à un polynôme P de E associe le reste de la division euclidienne de F par G.
1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) Dans quels cas f est-il un automorphisme de E ? (On pourra distinguer les cas où F et G sont premiers entre eux ou non).
3) On suppose F et G sont premiers entre eux et que G est scindé à racines simples.
Trouver les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

ccinp 2022

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si P est scindé, alors P' aussi. Pour cela :
1) Énoncer le théorèreme de Rolle.
2) Si a est une racine d'ordre k de P, quelle est son ordre dans P' ?
3) Montrer le résultat voulu.

ccinp 2022

On considère $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}$.
Soit $\phi : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \Omega \\ (x,y) & \mapsto & (xy, \dfrac{x}{y}) \end{array}$

1) Montrer que ϕ est bijective et détermienr ϕ^{-1}.
2) On pose $(u,v) = \phi((x,y))$ et $f(x,y) = F(u,v)$.
Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ en fonctions des dérivés partielles de F.
3) Résoudre

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2f(x,y) + 2 = 0.$$

4) Résoudre :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0.$$

ccinp 2022

On définit pour tout $t > 0$, $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{(1+t)^2}$.
1) Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$, puis sur $[1,+\infty[$.
2) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$

ccinp 2022

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\sin(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t$.
1) Montrer que I existe.
2) On considère : $\forall x \in \mathbb{R}, J(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t \mid \sin(t) \mid}{t^2+1}\mathrm{d}t$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J(n\pi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(u+k\pi)\frac{\sin(u)}{(u+k\pi)^2+1}\mathrm{d}u$.
3) L'intégrale I est-elle absolument convergente ?

ccinp 2022

Soit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.
1) Montrer que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.
2) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et donner Γ'.
3) Montrer que :

$$\forall x > 1,\ \forall \lambda \in]-1,1[,\ \int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}{1-\lambda\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n\Gamma(x)}{(n+1)^x}.$$

ccinp 2022

Soient E et F deux espaces de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que
$\dim\big(\mathrm{Ker}(u+v)\big) \leq \dim\Big(\mathrm{Ker}(u)\bigcap \mathrm{Ker}(v)\Big) + \dim\Big(\mathrm{Im}(u)\bigcap \mathrm{Im}(v)\Big)$.
On pourra considérer la restriction de u à $\mathrm{Ker}(u+v)$

ccinp 2022

Soit $U_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Sans calculer aucun déterminant, déterminer les valeurs propres de U_n et leur multiplicité.
2) Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On pose : $\forall i \in [\![2, n]\!],\ f_i = \sum_{k=1}^{i-1} e_k - e_i$.
Montrer que $(f_i)_{2 \leq i \leq n}$ est une base orthogonale de l'espace propre associé à 0 de U_n.
3a) Déterminer une base orthonormale de cet espace propre.
3b) Donner une formule de diagonalisation de U_n.

ccinp 2022

1) Montrer que pour deux matrices A et B et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.
2) Soit p un projecteur orthogonal de rang r , montrer que
$\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = r$.
3) Montrer que pour tout vecteur x , $(x, p(x)) = (p(x), p(x))$.

ccinp 2022

Soient X, Y deux variables alátoires indépendantes suivant
la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $U = \mathrm{Min}(X, Y)$ et $V = \mathrm{Max}(X, Y)$.
1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner $P\big(X \leq n\big)$ et $P\big(X \geq n\big)$.
2) Donner $P\big(U = n\big)$ et $P\big(V = n\big)$.
3) Que peut-on dire des événememnts
$\big(X = n\big)\bigcap\big(Y = n\big)$ et $\big(U = n\big)\bigcap\big(V = n\big)$? Les variables aléatoires sont-elles indépedantes ?

ccinp 2022

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soient F et G deux polynômes de degré $n+1$

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice 1
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Établir l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes (P_n) formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque P_n de degré n et de coefficient dominant 1.

b) Étudier la parité des polynômes P_n.

c) Montrer qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1}.$$

Exercice 2
Soit $x \in [0, n]$. Montrer que $(1 - x/n)^n \le e^{-x}$. En déduire $\lim_{n\to\infty} \int_{x=0}^{n} (1 - x/n)^n \, dx$.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice 1

Soit E le sous ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ défini par $E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Montrer que E est une sous-algèbre de $M_3(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication des matrices. Calculer dim (E).

b) Soit $M(a,b,c)$ un élément de E. Déterminer, suivant les valeurs des paramètres a, b et $c \in \mathbb{R}$ son rang. Calculer (lorsque cela est possible) l'inverse $M(a,b,c)^{-1}$ de $M(a,b,c)$.

c) Donner une base de E formée de matrices inversibles et une autre formée de matrices de rang 1.

Exercice 2

(a) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue de limite nulle en $+\infty$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' + y = h$ tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f + f' = l$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f = l$

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice 1
On considère deux entiers n et p strictement positifs.
On dispose de n tiroirs $T_1, \cdots, T_n$ et de p boules $B_1, \cdots, B_p$.
On dispose les p boules dans les tiroirs, les rangements étant équiprobables et indépendants.
On note X_k la variable aléatoire comptant le nombre de boules dans le tiroir T_k et Y le nombre de tiroirs vides.
1) Soit k un entier entre 1 et n. Déterminer la loi de X_k.
2) Les variables $X_1, \cdots, X_n$ sont-elles indépendantes ?
3) Déterminer $\mathbb{E}(Y)$.
4) Déterminer la loi de Y.

Exercice 2
Soit $\phi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \phi(P, Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$$

1. Montrer que ϕ existe, et que c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Calculer $\phi\left(X^i, X^j\right)$, en déduire que $((i+j)!)^2 \leq (2i)!(2j)!$.

1 Exercice

Soient a et b deux entiers strictement positifs. Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On tire une poignée de n boules dans l'urne. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans la poignée.

a) Déterminer la loi de X.
On admet la formule suivante
où $n \leq a+b$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

b) Calculer l'espérance de X.
Exercice 2

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in C^0([a,b], \mathbb{R}_+)$ telle que $\int_a^b f = 1$. Comparer $\left(\int_a^b tf(t)dt\right)^2$ et $\int_a^b t^2 f(t)dt$.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ et P un polynôme admettant 0 comme racine simple, tel que $P(u) = 0$.

Montrer de deux manières différentes que $\mathrm{Ker}(u)$=$\mathrm{Ker}(u^2)$, dont l'une utilisant le théorème de décomposition des noyaux.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = n(u_n - u_{n+1})$.

a) Montrer que $(nu_{n+1})_{n\geq 0}$ converge vers 0.

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge et déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice 1
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C})$ une matrice nilpotente : $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

a) Quel est le polynôme caractéristique de A ?
b) Démontrer que $A^n = 0$.
c) Prouver que $\det(A + I_n) = 1$.
d) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathcal{C})$ inversible et commutant avec A.
   (a) Que dire de AM^{-1}.
   (b) Montrer que $\det(A + M) = \det(M)$.
   (c) Cette égalité reste-elle vraie pour toutes les matrices commutant avec A ?

Exercice

Soit g définie par $g(x) = \int_0^1 \frac{t^x(t-1)}{\ln(t)} dt$.

a) Montrer que g est définie sur $]-1, +\infty[$.
b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$.
c) Calculer la limite de g en $+\infty$ et déterminer g.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice 1

On considère un meuble à 8 tiroirs, dans lequel il peut se trouver un objet avec la probabilité p. Lorsque cet objet est dans le meuble il a autant de chance de se trouver dans un tiroir que dans l'autre. On a ouvert 7 tiroirs du meuble sans trouver l'objet. Calculer la probabilité que l'objet soit dans le meuble

---

Exercice 2

On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$

(a) Trouver une relation entre u_n et u_{n+1}.

(b) Trouver le réel α tel que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n) + \alpha \ln(n)$ converge vers une limite ℓ, et donner un équivalent de $v_n - \ell$ lorsque n tend vers $+\infty$.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice 1

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1, (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, et p un projecteur de E.

1. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si il est symétrique.
2. On suppose que p est un projecteur orthogonal. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2$.

Exercice 2

(a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+b} = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t^a} \mathrm{d}t.$$

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 Soit $f(x) = \int\limits_0^{\pi/4} (\tan(t))^x dt$

a) Domaine de définition de f ?

b) Montrer que f est continue et décroissante. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Calculer $f(x) + f(x+2)$ et en déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 2
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(n+x)}{(n+x)\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$$

1°) Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2°) Étudier la convergence de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Exercice 2
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in O(n)$ une matrice orthogonale.

a) Montrer que : $\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2 = n$.

b) Montrer que : $n \leqslant \sum\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice 1

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$. On se place dans $\mathbb{R}^n$ que l'on munit de son produit scalaire canonique. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Lorsque F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\delta(\mathrm{F}) = \max_{i \in [|1,n|]} \mathrm{d}\left(e_i,\ \mathrm{F}\right)$$

1°) Montrer que l'ensemble

$$\mathrm{G} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Calculer $\dim(G)$ et $\delta(G)$.

2°) On suppose dans cette question que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.

a) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\left(e_i,\ \mathrm{F}\right)^2 = n - k$$

b) Montrer que l'on a $\delta(\mathrm{F}) = \sqrt{\dfrac{n-k}{n}}$ si et seulement si tous les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont équidistants de F.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in O(n)$ une matrice orthogonale.

a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = n$.

b) Montrer que : $n \leqslant \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que son polynôme caractéristique est $(X-1)^2(X+1)$.

b) Est-elle diagonalisable ?

c) Montrer qu'elle est semblable à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 Soient E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme de E ; on notera $(.\,|\,.)$ le produit scalaire.

a) On suppose que u possède deux valeurs propres réelles λ et μ de signes opposés. Montrer qu'il existe $z \in E$ non nul tel que $u(z)$ soit orthogonal à z.

b) On suppose u symétrique de trace nulle. Montrer qu'il existe $z \in E$ non nul tel que $u(z)$ soit orthogonal à z.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice
Soit pour $x \geq 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln(1 + \frac{x}{n}).$$

a) Justifier que f est bien définie sur $I = [0, +\infty[$ et qu'elle est dérivable sur I.

b) Donner un équivalent de f en 0^+.

Exercice
Soit $p \in]0, 1[$ et $M \in \mathcal{M}_3(\{0, 1\})$ une matrice dont les coefficients X_{ij} sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
1. Donner la loi de $\mathrm{Tr}(M)$.
2. Calculer l'espérance du déterminant de M.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.

La calculatrice est autorisée.

Exercice 1

Soit a et b deux réels strictement positifs. Montrer

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{1-\mathrm{e}^{-bx}}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$$

Exercice 2

Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi $\mathcal{G}(p)$(loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$).

a) Déterminer la loi de la somme $S = X + Y$.

b) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(S = k)$ où k est un élément de $S(\Omega)$.

Exercice

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$.

Question 1 Montrer que l'application $x \mapsto F(x)$ est une application de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Question 2

En remarquant que $F(x) \geq \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$, déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x \to 0$.

Exercice

1-a) Montrer que la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} u_n}$ est convergente. On note ℓ la limite.

b) Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_n (u_n - \ell)$.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice

Pour chaque réel $h > 0$, on note W_h l'ensemble des applications f continues de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{x+h}^{x+2h} f(t)dt = 2\int_{x}^{x+h} f(t)dt.$$

a) Montrer que W_h est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$.

b) W_h est-il de dimension finie ?

c) Prouver que $\bigcap_{h>0} W_h = \{0\}$.

Exercice

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue.
Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \leq ax + b$.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice

Pour fidéliser ses clients, une marque de chocolat décide de placer dans chaque tablette une pièce de puzzle. Le puzzle est composé de n morceaux distincts ($n \geq 1$). Le morceau qui se trouve dans la tablette est supposé suivre une loi uniforme sur les n morceaux possibles. Le client est supposé acheter les différentes tablettes au hasard. On note N la variable aléatoire égale au nombre d'achats à réaliser pour obtenir toutes les pièces du puzzle.

a) Déterminer $N(\Omega)$ où Ω est un espace de probabilité décrivant l'expérience.

b) La première pièce étant obtenue au premier achat, on note N_2 le nombre d'achats supplémentaires pour obtenir la deuxième pièce. Donner la loi de N_2.

c) Montrer que N est la somme de n variables aléatoires qui suivent des lois géométriques. Démontrer que N admet une espérance et déterminer la.

Exercice

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue.
Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \leq ax + b$.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice
Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme défini par :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \langle u \mid x \rangle v + \langle v \mid x \rangle u$$

où (u, v) est une famille libre.
1) Montrer que f est un endomorphisme symétrique et déterminer ses éléments propres.

Exercice

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f d'une variable réelle x donnée par :

$$f(x) = \int_0^1 t^x \ln t \ln (1-t) \mathrm{d}t.$$

b) Montrer que :

$$\forall x \in]-2, +\infty[, \qquad f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(x+n)^2}$$

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice
Pour tout entier $n \geq 0$, on considère l'application $u_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}$.
1) Montrer la convergence simple de la série $\sum u_n$. On note f la somme de cette série.
2) Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

Exercice
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A+X) = \det(A) + \det(X).$$

1) Montrer que A n'est pas inversible.
2) Montrer que A est nulle.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice
L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

1 Exercice

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mutuellement indépendantes et identiquement distribuées, suivant la loi de Bernouilli de paramètre 1/2. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} kX_k \quad \text{et} \quad a_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Déterminer l'espérance et la variance de Y_n.
2. Démontrer que pour tout $k \in [\![0; a_n]\!], P(Y_n = k) = P(Y_n = a_n - k)$.
3. Déterminer les valeurs prises par Y_n.

Exercice

2-a) Montrer que la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin u_n$ est convergente.

b) Trouver $\alpha > 0$ tel que la suite $\left(v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \dfrac{1}{u_n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite strictement positive.

c) En déduire un équivalent de u_n, puis la nature de la série $\sum_n u_n$ et de la série $\sum_n (-1)^n u_n$.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$ une application non nulle.
On note

$$G = \{h \in \mathscr{L}(E), f \circ h = 0\} \text{ et } H = \{h \in \mathscr{L}(E), \mathrm{tr}(f \circ h) = 0\}.$$

Prouver que G et H sont des sous-espaces vectoriels dont on donnera la dimension.

Exercice
Soit $n \in \mathbb{N}$.
1) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \exp(n x_n) = 1$
2) Donner la limite de (x_n).

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

1 Exercice

Soit $\alpha \geq 1$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^\alpha}$$

1) Etudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} u_n$.

2) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ dans le cas $\alpha = 1$.

Exercice
1) Rappeler la factorisation de $a^n - b^n$ où a et b sont des entiers.
2) Montrer que si $2^n + 1$ est un nombre premier alors n est une puissance de 2 .($n = 2^p$)
3) Montrer si p et q sont des entiers distincts alors $2^{2^p} + 1$ et $2^{2^q} + 1$ sont premiers entre eux.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice
L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.
Exercice
On considère l'équation différentielle :

$$y" = (x^4 + 1)y.$$

a) Montrer que cette équation admet une unique solution $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 1$.

b) On admet dans cette question que $x \mapsto \dfrac{1}{(f(x))^2}$ est définie et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, montrer que $g : x \mapsto f(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{(f(t))^2}$ est solution de l'équation différentielle.

---

1 Exercice

1. Calculer la fonction génératrice et l'espérance de la loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, 2n\}$.

2. Existe-t-il deux variables aléatoires, X_1,X_2 indépendantes suivant la même loi, prenant toutes deux leurs valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$ et telles que $X_1 + X_2$ suivent une loi uniforme.

sujet22

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice
L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.
Exercice
1) Etudier la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\dfrac{n^3+n}{n^3+n^2}\right)$.
2) Soient P et Q deux polynôme qui n'ont pas de racines entières,étudier

$$\sum_{n\geq 1} \frac{P(n)}{Q(n)}$$

.

Exercice

ALG-CT-9

Rép.

1. Si Z suit cette loi, $G_Z(s) = \displaystyle\sum_{i=0}^{2n} \frac{s^i}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\frac{1-s^{2n+1}}{1-s}$, et $E(Z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{2n} \frac{i}{2n+1} = n$.

2. Les racines de $G_{X_1+X_2}$ sont les racines $(2n+1)$-ièmes de 1 , sauf 1 .

Or $G_{X_1+X_2} = G_{X_1}G_{X_2}$. Si X_1 et X_2 ont la même loi, alors $G_{X_1+X_2} = G_{X_1}^2$, qui n'a que des racines multiples : impossible.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice

Soient α un réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$$

1. On suppose que $\alpha > 1$. Démontrer que la suite (u_n) converge vers 0 .
2. Déterminer, en discutant selon la valeur de α, la limite de la suite (u_n).

Exercice

Soit a et n deux entiers naturels non nuls, on pose $N = an$. On dispose aléatoirement N boules dans n urnes. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre d'urnes vides. Déterminer l'espérance de Y et donner un équivalent de cette espérance quand n tend vers $+\infty$. Interpréter

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice

Soient $c \in \mathbb{R}$ et $\Omega(c)$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2}\left(x_{n+1} + x_{n-1}\right) = cx_n$$

1°) L'ensemble $\Omega(c)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? Le cas échéant, quelle est sa dimension ?

2°) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur c pour que toutes les suites de $\Omega(c)$ soient bornées.

Exercice

On fixe dans cet exercice un réel $\lambda \in]-1, 1[$. On note Ω l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développables en série entière et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x) + f(\lambda x).$$

Montrer qu'il existe des fonctions non nulles dans Ω. Montrer qu'il en existe une seule prenant la valeur 1 en 0 (on la notera g). Décrire Ω à l'aide de g.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \left(x^2 + 2y^2\right) \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

a) Déterminer les points critiques de f.
b) Calculer, sous réserve d'existence, le maximum et le minimum global de la fonction f. Déterminer aussi les extremums locaux de f.

Exercice

Soient E un espace euclidien de dimension n et un entier naturel $p \geqslant 2$. On considère famille $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ qui possède la propriété $(\mathscr{O})$ suivante :

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, \quad (i \neq j) \quad \Longrightarrow \quad \langle x_i \mid x_j \rangle < 0$$

1°) On note p_1 la projection orthogonale sur $\{x_1\}^{\perp}$. Donner l'expression de $p_1(x)$ pour tout $x \in$ E. Montrer que $(p_1(x_i))_{i\in[\![2,p]\!]}$ possède la propriété $(\mathscr{O})$.
2°) Montrer que si $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ possède la propriété $(\mathscr{O})$ alors on peut en extraire une famille libre de $p - 1$ vecteurs. En déduire une inégalité reliant p et n.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On définit la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$$

Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction ψ que l'on déterminera.

Exercice

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice $\mathrm{A} = [a_{i,j}]_{i,j\in[1,n]}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ lorsque le polynôme caractéristique de A vaut

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - a_{k,k})$$

On notera $\mathscr{B}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété P.
1) Montrer que $\mathscr{B}_n$ n'est pas vide.
2°) Soit $\mathrm{A} = [a_{i,j}]_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ une matrice symétrique réelle.
2) Montrer que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{\alpha\in\mathrm{sp}(\mathrm{A})} \alpha^2$$

3) En déduire l'ensemble $\mathscr{B}_n \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul. Soit E_X, l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui admettent X comme vecteur propre.

(1) Montrer que E_X est un espace vectoriel.

(2) Déterminer l'espace E_X. Quel est sa dimension ?

Exercice

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.

a) Domaine de définition de f. On étudie ensuite f sur $]1, +\infty[$.

b) Etudier la continuité de f et limites de f en 1 et $+\infty$.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice

On pose, pour $n \geqslant 3, S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k}$.
(1) Quelle est la nature de cette série ?
(2) Donner un équivalent de S_n quand $n \to +\infty$.

Exercice

Soient E un espace euclidien, u un vecteur non nul et $H = u^\perp$. Soient p la projection orthogonale sur H et s la symétrie orthogonale par rapport à H.

a) Montrer que $\forall x \in E \qquad p(x) = x - \frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}u.$

b) Montrer que $\forall x \in E \qquad s(x) = x - 2\frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}u.$

c) On considère dans $\mathbb{R}^3$ le plan $(\Pi : x - y + z = 0)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à Π.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice

Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. On pose $M = \begin{bmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$.

(1) Soit la variable aléatoire $Z = \mathrm{tr}(M)$. Donner la loi de Z.
(2) Déterminer la probabilité p que la matrice M soit diagonalisable.

Exercice

On considère l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \qquad (E)$$

a) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

b) Trouver une solution particulière de (E) puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice

On définit sur $\mathbb{R}_+$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) = \frac{1}{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}.$$

1) Montrer que $(f_n)_{n\geq n}$ converge simplement vers une fonction notée f que l'on précisera.
2) On pose pour tout entier $n \geq 2$:

$$I_n = \int_0^1 f_n \text{ et } J_n = \int_1^{+\infty} f_n.$$

Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$ et déterminer la limite de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p. Calculer l'espérance de $\frac{1}{1+X}$.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs de boules dans l'urne suivant le protocole suivant : après chaque tirage la boulé tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée. On note pour tout entier naturel n non nul X_n le nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1) Déterminer la loi de X_1 et de X_2.
2) Donner la loi de X_n.

Exercice

Exercice

Soit $M \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(M) = 2n$ et $M^3 = 0$.

Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice

Soit $n \geq 2$. Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise dans cette urne.

On appelle X le rang du tirage de la première boule blanche, et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1) Déterminer la loi de X et $\mathbb{E}(X)$.
2) Exprimer Y en fonction de X et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice

Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $\forall t \in [0,1],\ f_n(t) = \left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n$ et $a_n = \displaystyle\int_0^1 f_n$.
1) Montrer que (f_n) converge simplement.
2) Montrer que $(a_n$ converge et déterminer sa limite.
3) Etudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice

Une urne contient initialement une boule blanche.
On effectue un ou plusieurs lancer indépendants d'une pièce équilibrée.
• Si on obtient pile : on ajoute une boule noire et on lance de nouveau la pièce,
• Si on obtient face, on tire une boule de l'urne et l'expérience s'arrête.
On note X le numéro du lancer auquel on arrête l'expérience.
1° déterminer la loi de X.
2° Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche à la fin de l'expérience.

Exercice

On pose
$$a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

a) Justifier l'existence de a_n.

b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n x^n$

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice

ana11-PLD
L'oral dure entre 25 et 30 minutes
La calculatrice est autorisée.

Exercice

On pose : $h : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x \ln n}$ Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de h, puis montrer que h est continue.

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que la matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -10 \\ -10 & 5 & 0 \\ 6 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier : $\mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}(f)$.

b) Ecrire la matrice de f dans une base orthonormée directe de E formée d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(f)$.

c) En déduire la nature géométrique de f.

éléments de correction

remarque : pour les meilleurs étudiants l'exercice peut être traité en peu de temps, on leur donnera un autre exercice en plus. On insistera sur le fait que l'on peut faire peu de calculs.

a) On obtient $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(\epsilon_1) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ qui est orthogonal aux trois vecteurs colonnes de la matrice (inutile d'extraire une famille libre de l'image).

b) On demandera de justifier rapidement $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^{\perp}$. La matrice est a priori de cette forme :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$$

En effet $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f et la première colonne est évidente. Du coup (!!), plutôt que d'utiliser une formule de changement de base, on choisit deux vecteurs du plan : $x + 2y + 2z = 0$, un premier par exemple $\epsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le produit vectoriel normé