Exercice 1.

Pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, on pose :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right),$$

où $\forall t \in \mathbb{R}, ch(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

1. Montrer que, pour tout x réel, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Déterminer l'ensemble J des réels x pour lesquels la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
   On pourra utiliser la suite $(\ln(P_n(x)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et faire une DL. *On a besoin un peu du cours sur les séries convergentes , même idée que pour les intégrales on fait une étude locale et on reconnait des termes généraux de séries ABSOLUMENT convergentes*
3. Soit $x \in J$. On note $\varphi(x)$ la limite de la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (a) Étudier la parité et la monotonie de la fonction φ sur J.
   (b) *uniquement pour les 5/2* Démontrer que la fonction φ est continue sur J.
4. (a) Prouver que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\operatorname{ch}}$.
   On pourra utiliser un changement de variable.
   (b) En déduire l'intégrabilité de la fonction $\dfrac{1}{\varphi}$.