DNS1

Exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = P_n(x) > 0$ comme produit de réels strictement positifs.
Or : si $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n \times \operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{n+1}\right)$ avec $u_n > 0$ et $\operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{n+1}\right) \geqslant 1$. Donc $u_{n+1} \geqslant u_n$: la suite $\boxed{(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$.

2. En reprenant les mêmes notations, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant 1 > 0$. On peut donc poser $v_n = \ln(u_n)$ et on a : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\operatorname{ch}\frac{x}{k}\right)$.
Or, lorsque k tend vers l'infini, on a : $\ln\left(\operatorname{ch}\dfrac{x}{k}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{2k^2} + o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)\right) = \dfrac{x^2}{2k^2} + o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ somme de deux termes généraux de séries absolument convergentes. Ainsi la série $\displaystyle\sum_k \ln\left(\operatorname{ch}\frac{x}{k}\right)$ converge et donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge i.e. la suite $(\ln(P_n(x)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Soit $S(x)$ sa limite. Par continuité de la fonction exponentielle, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \exp(v_n)$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\exp(S(x))$ i.e. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, (P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$.
En notant $\varphi(x)$ sa limite, on a φ définie sur $J = \mathbb{R}$ et de plus, φ strictement positive sur $\mathbb{R}$.

3. .

3.1. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction P_n est paire, par conservation de la parité par passage à la limite simple, $\boxed{\varphi \text{ est paire}}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction P_n est croissante sur $\mathbb{R}^+$ (car produit de fonctions positives et croissantes), par conservation de la monotonie par passage à la limite simple, $\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+}$.
Par parité, on a alors $\boxed{\varphi \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^-}$

3.2. Par parité, pour montrer la continuité de φ sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer la continuité de φ sur tout segment de la forme $[0, a]$ avec $a > 0$.
Soit $a > 0$. On considère la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $[0, a]$ par : $h_n(x) = \ln\left(\operatorname{ch}\dfrac{x}{n}\right)$. On a $\|h_n\|_\infty^{[0,a]} = \ln\left(\operatorname{ch}\dfrac{a}{n}\right)$ où la notation $\|f\|_\infty^{[0,a]}$ désigne la borne supérieure de $|f(x)|$ lorsque x décrit $[0, a]$ et qui existe pour h_n par continuité de h_n sur le segment $[0, a]$.
Or la série $\sum \ln\left(\operatorname{ch}\dfrac{a}{n}\right)$ est convergente (et de somme $S(a)$ avec les notations de la question 2)).
Ainsi la série de fonction $\sum h_n$ converge normalement sur le segment $[0, a]$ donc elle converge uniformément sur $[0, a]$. Comme pour tout n, h_n est continue sur $[0, a]$, on en déduit que la somme uniforme S est aussi continue sur $[0, a]$. Enfin, par composition, comme $\varphi = \exp oS$, φ est continue sur $[0, a]$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$ et φ est paire, donc $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

4. .

4.1. Soit f la fonction $f = \dfrac{1}{\operatorname{ch}}$. f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. De plus, f est positive et paire. Pour montrer l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de la majorer sur $\mathbb{R}^+$ par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Or, $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 < f(x) \leqslant 2e^{-x}$ car $\forall x \in \mathbb{R}^+, \operatorname{ch}(x) \geqslant \dfrac{1}{2}e^x$, et la fonction $x \to 2e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi f intégrable sur $\mathbb{R}^+$, et par parité sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ainsi $\boxed{\dfrac{1}{\operatorname{ch}} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.
f est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\theta : u \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(u) \in \mathbb{R}$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. Donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} \theta' \times fo\theta$ sont de même nature et égales en cas de convergence. Or on vient d'établir que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$ est une intégrale convergente, et on a donc l'autre aussi et : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = \int_0^{+\infty} \frac{2}{u^2+1}\,du$.
Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\operatorname{ch}} = \pi}$

4.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(x) \geqslant P_1(x) = \operatorname{ch}(x) > 0$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < \dfrac{1}{\varphi(x)} \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$. Or on vient de voir que $\dfrac{1}{\operatorname{ch}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc, comme $\dfrac{1}{\varphi}$ est continue positive, $\boxed{\dfrac{1}{\varphi} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$