Correction du devoir d'été

Problème

Partie I- Etude de quelques exemples

1. Comme $N^2 = 0$ et $N \neq 0$, $\boxed{f \text{ est nilpotente d'indice } 2}$. Le rang de f est 2, car les deux premières colonnes de N sont nulles, et les deux dernières sont indépendantes.

2. (a) Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe donc $a \in \mathbb{R}^4$ tel que $x = u(a)$.

   Ainsi, $u(x) = u^2(a) = 0$. On a donc prouvé que $\underline{\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)}$.

   Or, comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang :

   $$\dim\left(\mathbb{R}^4\right) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)).$$

   Avec $\mathrm{rg}(u) = 2$, on obtient $\underline{\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 2}$.

   On en déduit $\boxed{\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)}$.

   (b) Considérons une base (k_1, k_2) de $\mathrm{Ker}(u)$. Comme $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$, il existe deux vecteurs a_1 et a_2 de $\mathbb{R}^4$ tels que $k_1 = u(a_1)$ et $k_2 = u(a_2)$.

   Montrons d'abord que la famille $\mathscr{B} = (k_1, k_2, a_1, a_2)$ est libre. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ quatre scalaires tels que :

   $$\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 = 0 \qquad (\star).$$

   En appliquant u qui est linéaire, il reste $\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 = 0$. Par liberté de (k_1, k_2), on obtient $\beta_1 = \beta_2 = 0$. En revenant à $(\star)$ et en exploitant une nouvelle fois la liberté de (k_1, k_2), on obtient $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

   $\mathscr{B} = (k_1, k_2, a_1, a_2)$ est donc une famille libre de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Sachant que $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

   (c) Ecrivons la matrice de u dans cette base $\mathscr{B}$: $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{array}{c} \\ k_1 \\ k_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(k_1) & u(k_2) & u(a_1) & u(a_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}}$.

3. (a) Si P est un polynôme constant, il est évident que $\Delta(P) = 0$. Supposons $d = \deg(P) \geqslant 1$. P s'écrit donc $\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
\Delta(P) &= \sum_{k=0}^{d} a_k \left[(X+1)^k - X^k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{d} a_k \left[\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i\right) - X^k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \\
&= \sum_{0\leqslant i<k\leqslant d} a_k \binom{k}{i} X^i \\
&= \sum_{i=0}^{d-1} \left(\sum_{k=i+1}^{d} a_k \binom{k}{i}\right) X^i
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\deg(\Delta(P)) \leqslant d-1$. De plus, le coefficient de X^{d-1} dans $\Delta(P)$ est $a_d\binom{d}{d-1} = d a_d \neq 0$, ce qui montre que $\deg(\Delta(P)) = d-1$.

On a donc montré $\boxed{\deg(\Delta(P)) = \begin{cases} \deg(P)-1 & \text{si } \deg(P) \geqslant 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}}$.

(b) Au bilan, on a montré que si P est constant, alors $\Delta(P) = 0$, et que si P est non constant, de degré $d \geqslant 1$, alors $\deg(\Delta(P)) = d-1 \neq -\infty$ et donc $\Delta(P) \neq 0$. Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]}$.

D'après ce qui précède, $\mathrm{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Or, comme $\dim(\mathrm{Ker}(\Delta)) = 1$ et que $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n$, le théorème du rang assure que $\underline{\dim(\mathrm{Im}(\Delta)) = n-1 = \dim(\mathbb{R}_{n-2}[X])}$. Par conséquent, $\boxed{\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{n-2}[X]}$.

(c) On a prouvé que, pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$, $\Delta\left(\mathbb{R}_p[X]\right) = \mathbb{R}_{p-1}[X]$. Par récurrence finie, on a immédiatement :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \mathrm{Im}(\Delta^k) = \Delta^k(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = \mathbb{R}_{n-1-k}[X] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\Delta^n) = \{0\}.$$

Ainsi $\Delta^n = 0$ et $\Delta^{n-1} \neq 0$ (car $\mathrm{Im}\left(\Delta^{n-1}\right) = \mathbb{R}_0[X] \neq \{0\}$), et donc $\boxed{\Delta \text{ est nilpotent d'indice } n}$.

Partie II- Relations entre le rang et l'indice de nilpotence

1. (a) Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe des scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1}$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{k=0}^{s-1} \alpha_k u^k(x_0) = 0.$$

Considérons alors le plus petit entier naturel $p \in [\![0, s-1]\!]$ tel que $\alpha_p \neq 0$. Il reste donc $\sum_{k=p}^{s-1} \alpha_k u^k(x_0) = 0$.

En appliquant u^{s-1-p} qui est linéaire, on obtient $\alpha_p u^{s-1}(x_0) + \alpha_{p+1} \underbrace{u^s(x_0)}_{=0} + \ldots + \alpha_{s-1} \underbrace{u^{2(s-1)-p}(x_0)}_{=0} = 0$, i.e. $\alpha_p u^{s-1}(x_0) = 0$. Comme $u^{s-1}(x_0) \neq 0$, on en déduit $\alpha_p = 0$. Absurde !

$\boxed{\text{La famille } \left(u^k(x_0)\right)_{0\leqslant k\leqslant s-1} \text{ est donc libre}}$.

(b) La sous-famille $\left(u^k(x_0)\right)_{1\leqslant k\leqslant s-1}$ est donc libre. Puisqu'elle est constituée de $s-1$ éléments de $\mathrm{Im}(u)$, on en déduit $\underline{s-1 \leqslant \mathrm{rg}(u)}$.

De plus, comme $u^{s-1}(x_0)$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(u)$, on en déduit $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \geqslant 1$ et par théorème du rang, $\underline{\mathrm{rg}(u) \leqslant n-1}$.

On a prouvé $\boxed{s \leqslant \mathrm{rg}(u) + 1 \leqslant n}$.

2. (a) Considérons la restriction de u à $\mathrm{Im}\left(u^k\right)$:

$$w : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}\left(u^k\right) & \to & E \\ x & \mapsto & u(x) \end{array} \right. .$$

Déjà, $\mathrm{Ker}(w) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}\left(u^k\right)$ et $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}\left(u^{k+1}\right)$.

En appliquant le théorème du rang à w, il vient : $\dim\left(\mathrm{Im}\left(u^k\right)\right) = \dim(\mathrm{Ker}(w)) + \mathrm{rg}\left(u^{k+1}\right)$. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(w)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u))$, on obtient $\boxed{\mathrm{rg}\left(u^k\right) - \dim(\mathrm{Ker}(u)) \leqslant \mathrm{rg}\left(u^{k+1}\right)}$.

(b) On a prouvé $\mathrm{rg}\left(u^k\right) - \mathrm{rg}\left(u^{k+1}\right) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u))$ pour tout $k \in [\![0, s-1]\!]$.

On en déduit $\sum_{k=0}^{s-1}\left(\mathrm{rg}\left(u^k\right) - \mathrm{rg}\left(u^{k+1}\right)\right) \leqslant s \dim(\mathrm{Ker}(u))$. Par simplification en cascade :

$$\sum_{k=0}^{s-1}\left(\mathrm{rg}\left(u^k\right) - \mathrm{rg}\left(u^{k+1}\right)\right) = \mathrm{rg}\left(u^0\right) - \mathrm{rg}\left(u^s\right) = \mathrm{rg}(\mathrm{Id}) - \mathrm{rg}(0) = n.$$

Avec le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - \mathrm{rg}(u)$, et donc $n \leqslant s\left(n - \mathrm{rg}(u)\right)$. or, d'après **1(b)**, $n - \mathrm{rg}(u) > 0$, et donc :

$$\boxed{\frac{n}{n - \mathrm{rg}(u)} \leqslant s}.$$

3. On a prouvé dans les questions **1(b)** et **2(b)** : $\boxed{\frac{n}{n - \mathrm{rg}(u)} \leqslant s \leqslant \mathrm{rg}(u) + 1 \leqslant n}$ $(\star)$.

(a) • Commençons par supposer $s = n$. $(\star)$ impose alors $n \leqslant \mathrm{rg}(u) + 1 \leqslant n$, i.e. $\mathrm{rg}(u) = n - 1$.

• Si on suppose maintenant $\mathrm{rg}(u) = n - 1$, $(\star)$ impose $n \leqslant s \leqslant n$ et donc $s = n$.

(b) • Supposons $\dim(E) = n = 3$. Toujours avec $(\star)$, $\frac{3}{3 - \mathrm{rg}(u)} \leqslant s \leqslant \mathrm{rg}(u) + 1$.

Il suffit alors de distinguer tous les cas possibles pour $\mathrm{rg}(u)$:

- ▷ si $\mathrm{rg}(u) = 0$, i.e. $u = 0$, alors $s = 1$.
- ▷ Si $\mathrm{rg}(u) = 1$, alors $\frac{3}{2} \leqslant s \leqslant 2$ et donc $s = 2$.
- ▷ Si $\mathrm{rg}(u) = 2$, alors $3 \leqslant s \leqslant 3$ et donc $s = 3$.

Dans tous les cas, $\boxed{s = \mathrm{rg}(u) + 1}$.

• Reprenons l'exemple de la première question : f est nilpotent et vérifie $\mathrm{rg}\left(f\right) = s = 2$.

Partie III- Commutant d'un endomorphisme nilpotent de rang $n-1$

1. • $\boxed{\mathscr{C}(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}(E)}$ en tant que noyau de l'application linéaire

$$\theta : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ g & \mapsto & f\circ g - g\circ f \end{array} \right. .$$

Si g, g' sont deux éléments de $\mathscr{C}(f)$, alors $g\circ g'\circ f = g\circ f\circ g' = f\circ g\circ g'$ et donc $\boxed{g\circ g' \in \mathscr{C}(f)}$.

2. (a) Comme $\mathrm{rg}(u) = n-1$, la question **II3(a)** assure que $s(f) = n$. D'après la question **II1(a)**, il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\right)$ soit libre. Cette famille étant constituée de n vecteurs de E qui est de dimension n, elle est une base de E.

   (b) • Si $v = w$, on a évidemment $v(x_0) = w(x_0)$.

   • Réciproquement, supposons $v(x_0) = w(x_0)$.

   Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $\mathscr{P}_k$ l'assertion « $v\left(u^k(x_0)\right) = w\left(u^k(x_0)\right)$ ».

   Comme $u^0 = \mathrm{Id}_E$, l'assertion $\mathscr{P}_0$ est vraie.

   Supposons l'assertion $\mathscr{P}_k$ vraie pour un $k \in [\![0, n-2]\!]$. Alors $u\left(v\left(u^k(x_0)\right)\right) = u\left(w\left(u^k(x_0)\right)\right)$.

   Comme $u\circ v = v\circ u$ et $u\circ w = w\circ u$, il vient $v\left(u^{k+1}(x_0)\right) = w\left(u^{k+1}(x_0)\right)$.

   Par récurrence finie, il vient donc $\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!], v\left(u^k(x_0)\right) = w\left(u^k(x_0)\right)}$.

   v et w sont deux endomorphismes de E qui coïncident sur la base $\left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\right)$ de E : ainsi $\boxed{v = w}$.

   (c) Id_E et u appartiennent à $\mathscr{C}(u)$ qui est stable par composition. On en déduit donc que $u^k \in \mathscr{C}(u)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis que $w = \alpha_0.\mathrm{Id}_E + \alpha_1.u + \ldots + \alpha_{n-1}.u^{n-1} \in \mathscr{C}(u)$.

   Vu que $v(x_0)) = w(x_0)$, la question précédente montre que $\boxed{v = \alpha_0.\mathrm{Id}_E + \alpha_1.u + \ldots + \alpha_{n-1}.u^{n-1}}$.

   (d) • On a vu dans la question précédente les deux inclusions $\mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{n-1}\right) \subset \mathscr{C}(u)$ et $\mathscr{C}(u) \subset \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{n-1}\right)$.

   • Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ des scalaires tels que $\lambda_0.\mathrm{Id}_E + \lambda_1.u + \ldots + \lambda_{n-1}.u^{n-1} = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On a donc en particulier :

$$\lambda_0.x_0 + \lambda_1.u(x_0) + \ldots + \lambda_{n-1}.u^{n-1}(x_0) = 0_E.$$

   La famille $\left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\right)$ étant libre, on en déduit $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$.

   $\boxed{\left(\mathrm{Id}_E, u, u^2, \ldots, u^{n-1}\right) \text{ est une famille libre, et est finalement une base de } \mathscr{C}(u)}$.

3. D'après la question I3., Δ vérifie les hypothèses de la question III2. : Δ est un endomorphisme nilpotent de rang $n-1$ d'un espace vectoriel de dimension n. De plus, l'endomorphisme D commute avec Δ : en effet, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\Delta(D(P)) = D(\Delta(P)) = P'(X+1) - P'(X).$$

$\boxed{\text{D'après le résultat de III2, il existe des réels } \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \text{ tels que } D = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \Delta^k}$.

Supposons maintenant $n=3$: il existe 3 réels a, b, c tels que $D = a\mathrm{Id}_E + b\Delta + c\Delta^2$.

Comme $D(1) = \Delta(1) = \Delta^2(1) = 0$, on a immédiatement $a = 0$.

Avec $D(X) = 1$, $\Delta(X) = 1$ et $\Delta^2(X) = 0$, on obtient $b = 1$.

Avec $D(X^2) = 2X$, $\Delta(X^2) = 2X+1$ et $\Delta^2\left(X^2\right) = 2$, on a $c = -\dfrac{1}{2}$.

Finalement, $\boxed{D = \Delta - \dfrac{1}{2}\Delta^2}$.

4. En notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, l'application $\theta : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^4\right) & \to & \mathscr{M}_4(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \end{array} \right.$ est un isomorphisme de $\mathscr{C}(f)$ vers $\mathscr{C}(N) = \left\{M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}) \,|\, NM = MN\right\}$.

   En considérant une matrice décomposée par blocs carrés de taille 2 sous la forme $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, on obtient :

$$MN = NM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = D \\ C = 0 \end{array} \right.$$

   $\mathscr{C}(N)$ est donc l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$$

   où a, b, c, d, e, f, g, h sont 8 scalaires quelconques. On en déduit $\boxed{\dim\left(\mathscr{C}(f)\right) = 8}$.

   Comme $s(f) = 2$, $\mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{s(f)-1}\right) = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, f\right)$ est de dimension 2 (car $\left(\mathrm{Id}_E, f\right)$ est libre).

   Par conséquent, f ne vérifie pas le résultat de **III2.** :

$$\boxed{\mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{s(f)-1}\right) \underset{\neq}{\subset} \mathscr{C}(f)}.$$

   Conclusion : sans l'hypothèse « u nilpotent de rang $n-1$ », le résultat de la question III2(d) n'est plus forcément vrai.

Partie IV

1. (a) Considérons les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés à respectivement $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. f et g sont bien nilpotents car $f^2 = g^2 = 0$. Par contre, comme $f+g$ est canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\left(f+g\right)^2 = \mathrm{Id}$ et par conséquent :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \left(f+g\right)^{2p} = \mathrm{Id} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \left(f+g\right)^{2p+1} = f+g \neq 0.$$

$\boxed{f+g \text{ n'est donc pas nilpotent}}$.

(b) Comme $f\circ g = g\circ f$, la formule du binôme assure que :

$$\left(f+g\right)^{2s-1} = \sum_{k=0}^{2s-1}\binom{2s-1}{k} f^k\circ g^{2s-1-k}.$$

Soit $k\in [\![0,2s-1]\!]$. Si $k\geqslant s$, alors $f^k=0$, et si $k\leqslant s-1$, alors $2s-1-k\geqslant k$ et donc $g^{2s-1-k}=0$; dans les deux cas, $f^k\circ g^{2s-1-k}=0$, et donc $\boxed{\left(f+g\right)^{2s-1}=0}$.

2. (a) Nous allons construire une application linéaire f convenable en donnant son action sur une base bien choisie de E.

Comme a et b sont des endomorphismes non nuls, il existe deux vecteurs x_0, x_1 de E tels que $b(x_0)\neq 0$ et $a(x_1)\neq 0$. Par théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre $(b(x_0))$ en une base $(b(x_0), e_2,\dots,e_n)$ de E.

Par théorème, il existe un et un seul endomorphisme f de E qui envoie la base $(b(x_0), e_2,\dots,e_n)$ sur la famille $(x_1, 0,\dots,0)$.

Remarquons alors que $\left(a\circ f\circ b\right)(x_0) = a(x_1)\neq 0$, ce qui montre que $\boxed{a\circ f\circ b\neq 0}$.

(b) γ est bien linéaire car :

$$\forall (f,g)\in\mathscr{L}(E)^2, \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \gamma\left(\alpha f+\beta g\right) = \alpha\gamma(f)+\beta\gamma(g).$$

De plus, pour tout $k\in\mathbb{N}$, γ^k est l'application $\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ v & \mapsto & u^k\circ v\end{array}\right.$.

En particulier, $\gamma^s=0$ et $\gamma^{s-1}\neq 0$ car $\gamma^{s-1}(\mathrm{Id}_E) = u^{s-1}\neq 0$.

$\boxed{\gamma \text{ est un endomorphisme nilpotent d'indice } s\text{. On montre de même le même résultat pour } \delta}$.

(c) Notons que γ et δ commutent :

$$\forall f\in\mathscr{L}(E), \gamma\circ\delta(f) = \delta\circ\gamma(f) = u\circ f\circ u.$$

Vu que $\Phi = \gamma-\delta$ et que $\gamma, -\delta$ ont le même indice de nilpotence s, la question **IV1.(b)** assure que $\boxed{\Phi^{2s-1}=0}$.

Nous allons maintenant établir que Φ^{2s-2} n'est pas l'endomorphisme nul, ce qui assurera que $\boxed{s(\Phi)=2s-1}$.

En procédant comme à la question **IV1.(b)** avec la formule du binôme :

$$\Phi^{2s-2} = \sum_{k=0}^{2s-2}\binom{2s-2}{k}(-1)^{2s-2-k}\gamma^k\circ\delta^{2s-2-k}.$$

Soit $k\in[\![0,2s-2]\!]$. Remarquons que si $k\geqslant s$, alors $\gamma^k=0$, et que si $k\leqslant s-2$, alors $\delta^{2s-2-k}=0$. Il reste donc :

$$\Phi^{2s-2} = \tbinom{2s-2}{s-1}(-1)^{s-1}\gamma^{s-1}\circ\delta^{s-1} \qquad \text{i.e} \qquad \forall v\in\mathscr{L}(E), \Phi^{2s-2}(v) = \tbinom{2s-2}{s-1}(-1)^{s-1}u^{s-1}\circ v\circ u^{s-1}.$$

Or, d'après la question **IV2.(a)**, comme u^{s-1} n'est pas l'endomorphisme nul, il existe $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $u^{s-1}\circ f\circ u^{s-1}\neq 0$, ce qui montre que $\Phi^{2s-2}(f)\neq 0$.

Exercice : calcul de l'intégrale de Gauss

1. • Soient x, x' deux réels tels que $0 \leqslant x \leqslant x'$. D'après la relation de Chasles, $\varphi(x') - \varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x'} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

   Comme $x \leqslant x'$ et $e^{-t^2} \geqslant 0$ pour tout $t \in [x, x']$, on a $\varphi(x') - \varphi(x) \geqslant 0$. $\boxed{\varphi \text{ est donc croissante}}$.

   • Une autre solution consiste à utiliser le théorème fondamental de l'intégration : comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et que $0 \in \mathbb{R}^+$, la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^+, \varphi'(x) = e^{-x^2} \geqslant 0.$$

   • Remarquons que pour tout réel $t \geqslant 1$, on a $t \leqslant t^2$ et donc $e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$.

   On en déduit que pour tout réel $x \geqslant 1$:

   $$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + e^{-1} - e^{-x} \\ &\leqslant \underbrace{\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + e^{-1}}_{\text{indépendant de } x} \end{aligned}$$

   φ étant croissante, l'inégalité $\varphi(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + e^{-1}$ reste valable pour $x \in [0,1]$. $\boxed{\varphi \text{ est donc majorée}}$.

2. (a) Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et que $0 \in \mathbb{R}^+$, le théorème fondamental de l'intégration assure que la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et :

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \varphi'(x) = e^{-x^2}}.$$

   (b) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Par composition de fonctions C^1, ψ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

   $$\boxed{\forall x > 0, \psi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi'\left(\sqrt{x}\right) = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}}.$$

   ψ est continue en 0 par composition de fonctions continues, et $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \psi'(x) = +\infty$. Le théorème de la limite de la dérivée assure alors que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x - 0} = +\infty$.

   $\boxed{\psi \text{ n'est donc pas dérivable en } 0}$ et son graphe admet à l'origine une demi-tangente verticale.

3. (a) $\boxed{f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}}$.

   (b) Soit un réel $x \geqslant 0$. Remarquons que pour tout réel $t \in [0, x]$:

   $$0 \leqslant \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} = \frac{e^{-x}}{1+t^2} e^{-xt^2} \leqslant \frac{e^{-x}}{1+t^2}.$$

   On en déduit :

   $$0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-x} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} e^{-x}.$$

   Par théorème des gendarmes, on en déduit $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

(c) i. Fixons $t \in [0,1]$. La fonction $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x(1+t^2)} \end{array} \right.$ est de classe C^2.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $u''(x) = \left(1+t^2\right)^2 e^{-x(1+t^2)}$ et donc $\left|u''(x)\right| = u''(x) \leqslant 4$.

Ainsi, l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall x \geqslant 0, \left|u(x) - u(x_0) - u'(x_0)(x-x_0)\right| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2} \sup_{y \in [x_0,x]} \left|u''(y)\right|$$

assure que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \left|e^{-x(1+t^2)} - e^{-x_0(1+t^2)} + (x-x_0)(1+t^2)e^{-x_0(1+t^2)}\right| \leqslant 2(x-x_0)^2}.$$

ii. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Remarquons que :

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) + (x-x_0)\int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{e^{-x_0(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + (x-x_0)\int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)} - e^{-x_0(1+t^2)} + (x-x_0)(1+t^2)e^{-x_0(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On en déduit par inégalité triangulaire :

$$\left|f(x) - f(x_0) + (x-x_0)\int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \frac{\left|e^{-x(1+t^2)} - e^{-x_0(1+t^2)} + (x-x_0)(1+t^2)e^{-x_0(1+t^2)}\right|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

or, d'après la question précédente :

$$\forall t \in [0,1], \frac{\left|e^{-x(1+t^2)} - e^{-x_0(1+t^2)} + (x-x_0)(1+t^2)e^{-x_0(1+t^2)}\right|}{1+t^2} \leqslant 2\frac{(x-x_0)^2}{1+t^2}$$

et donc :

$$\boxed{\left|f(x) - f(x_0) + (x-x_0)\int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\int_0^1 \frac{(x-x_0)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}(x-x_0)^2}.$$

iii. Soit $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{x_0\}$. En divisant par $|x-x_0| > 0$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\pi}{2}|x-x_0|$$

et par domination :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}\,\mathrm{d}t}.$$

(d) Soit $x > 0$. On sait que :

$$-2\Psi'(x)\Psi(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Avec le changement de variable $t = \sqrt{x}u$, on obtient :

$$\boxed{-2\Psi'(x)\Psi(x) =} -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^1 \sqrt{x}e^{-xu^2}\,\mathrm{d}u \boxed{= -\int_0^1 e^{-x(1+u^2)}\,\mathrm{d}u = f'(x)}.$$

(e) La fonction $f + \Psi^2$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}^+$, et la continuité de ψ a été établie en 2.), dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et de dérivée nulle : elle est donc constante sur $\mathbb{R}^+$.

Comme $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\psi(0) = 0$, on a : $\boxed{\forall x > 0, f(x) - \dfrac{\pi}{4} = -\psi(x)^2}$.

(f) D'après la question **3.(b)**, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Par conséquent, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \varphi^2\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Comme φ ne prend que des valeurs positives ou nulles, on en déduit $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.