Exercices de Mathématiques spéciales

MP2

2024-2025

Table des matières

Première partie

Algébre

Chapitre 1

Algébre linéaire

1.1 Révisions ou pas ?

l'exercice de base à savoir faire et rédiger

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$f^2 - 3f + 2\mathrm{Id} = 0.$$

a) Montrer que f est inversible et exprimer son inverse à l'aide de f.
b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

☞⚠L'exercice précédent sera à traiter différemment plus tard.

exercice 1 un changement de bases proposé

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 3 muni de la base $e = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base e est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $e_1' = e_1 + e_2, e_2' = e_1 + e_3$ et $e_3' = e_1 + e_2 + e_3$.
a) Montrer que la famille $e' = (e_1', e_2', e_3')$ forme une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.
b) Calculer A^n.

exercice 2 autour des projecteurs

Soient p et q deux projecteurs d'un K-espace vectoriel E vérifiant $p \circ q = 0$.
a) Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur.
b) Déterminer l'image et le noyau de celui-ci.

En dimension infinie c'est pus compliqué

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel vérifiant $f \circ g = Id$.
a) Montrer que Ker$(g \circ f)$ =Ker(f) et Im$(g \circ f)$ =Im(g).
b) Montrer que

$$E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im}(g).$$

c) Dans quel cas peut on conclure que $g = f^{-1}$.
d) Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$.

il faut savoir considèrer des restrictions

Remarque si on note $f_{|H}$ la restriction d'une application à un sous espace vectoriel H, le résultat

$$\mathrm{Ker}\Big(f_{|H}\Big) = \mathrm{Ker}(f) \cap H$$

si il est évident je ne suis pas certain qu'il soit au programme.
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On considère H un supplémentaire de Ker(f) dans E.
On définit $h : H \to E$ la restriction de $g \circ f$ à H.
a) Montrer que

$$\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker} h + \mathrm{Ker} f.$$

b) Observer que

$$rg(h) \geq rg(f) - \dim \mathrm{Ker}(g).$$

c) En déduire que

$$\dim \mathrm{Ker}(g \circ f) \leq \dim \mathrm{Ker} g + \dim \mathrm{Ker} f.$$

Une réciproque d'un résultat du cours

Soient $p_1 \dots p_k$ des projecteurs qui vérifient :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = \mathrm{Id}.$$

On note, pour tout i, F_i l'image de p_i . Montrer que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i.$$

(On pourra utiliser la trace)

1.2 exercices de concours

mines telecom

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$
a) Rappeler la définition de Ker(f) et Im(f).
b) Démontrer que f est injective si et seulement si Ker$(f) = \{0\}$.

mines telecom

1) Énoncer le théoréme du rang.
Soient f et g des endomorphismes de E un espace vectoriel de dimension finie.
2) On suppose que $g \circ f = 0$. Montrer que rg (f)+ rg$(g) \geq n$.
3) On suppose que $g + f$ est bijectif, montrer que rg (f)+ rg$(g) \geq n$.

mines telecom

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $f \circ f = 0$. montrer que rg$(f) \leq 2$.

mines telecom

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par le produit matriciel. On suppose que $I_n \notin \mathcal{H}$.
1) Donner un supplémentaire de $\mathcal{H}$.
2) Montrer que si $M^2 \in \mathcal{H}$ alors $M \in \mathcal{H}$.
3) Aboutir à une contradiction et conclure.

mines telecom

Soient E et F deux espaces de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que
$\dim\big(\mathrm{Ker}(u+v)\big) \leq \dim\Big(\mathrm{Ker}(u) \bigcap \mathrm{Ker}(v)\Big) + \dim\,\Big(\mathrm{Im}(u) \bigcap \mathrm{Im}(v)\Big)$.
On pourra considèrer la restriction de u à Ker$(u+v)$

Chapitre 2

Réduction des endomorphismes

2.1 Classiques

classique

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\chi_J = X^n - 1$. Déterminer les éléments propres de J.
2. Exprimer K en fonction de J.
3. Montrer que J et K commutent. En déduire que la matrice $D(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & & b \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c \\ c & & b & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Déterminer ses éléments propres.

original

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et u un endomorphisme de E nilpotent.
1) Montrer que $u^n = 0$.
2)
On suppose que $u^{n-1} \neq 0$.
a) Montrer qu'il existe une base B de E telle que $\mathrm{Mat}_B(u) = A$, où A est la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients de la sous-diagonale sont égaux à 1 et les autres sont nuls.
b) Résoudre l'équation $X^2 = A$.

classique (minestelecom

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$f\big(a + bX + cX^2\big) = (2a + c)(1 - X^2) + (a + b + c)X.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et écrire sa matrice dans la base canonique.
2) Quelles sont les valeurs propres de A ? A est-elle inversible ?
3) Trouver les vecteurs propres de A.
4) Donner le polynôme minimal de A.

mines telecom

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que f^2 est un projecteur.
a) Quelles sont les valeurs propres possibles de f.
b) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^3 = f$.

mines telecom

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.
1) Justifier que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$.
2a) Énoncer des propriétés polynômiales de diagonalisation de matrices.
2b) On suppose que B est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable, puis que $A = 0$.

mines telecom

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $a^2 + b^2 \neq 0$ et $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$.
1) Calculer MM^T. En déduire $\det(M)$
2) Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, montrer que $\mathrm{rg}(M) = 4$.
Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$, montrer que $\mathrm{rg}(M) = 2$.
3) Soit $w \in \mathbb{C}, w = b^2 + c^2 + d^2$. Quelles sont les valeurs propres de M ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

mines telecom

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note f l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à M associe $AM - MA$.
1) Démontrer que f est un endomorphisme.
2) Montrer que f est diagonalisable et trouver ses éléments propres.

mines telecom

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et f l'application définie par

$$f(M) = tr(A)M + tr(M)A.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

mines telecom

Soient u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.
a) Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de $u \circ v$, montrer que λ est valeur propre de $v \circ u$.
b) En considérant $u(P) = P'$ et $v(P) = \displaystyle\int_0^X P(t)\mathrm{d}t$. endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ montrer que le résultat est faux pour $\lambda = 0$.

mines telecom

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension quelconque. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur P de f vérifiant :

$$P(0) = 0 \; P'(0) \neq 0.$$

Montrer que l'image et le noyau de f sont supplémentaires.

ccinp

Soit $u \in L(E)$ l'endomorphisme associé à la matrice A dans la base $B = (e_1, \ldots, e_5)$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$$

avec $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$.
1. On suppose dans cette question que $a = b = c = d = e = 0$. Déterminer χ_u et π_u.
2. Soit $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Calculer $u_k(e_1)$.
3. Soit P un polynôme unitaire tel que $P(u)(e_1) = 0$.
a) Montrer que $\deg(P) \geq 5$.
b) Déterminer un polynôme P tel que $\deg(P) = 5$ et $P(u)(e_1) = 0$.
c) Déterminer π_u.
d) Déterminer χ_u par deux méthodes différentes.
4. On pose $a = c = e = 0$, $b = -2$ et $d = 4$. u est-il diagonalisable ?

mines telecom

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ et

$$A = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$$

a) Quel est le rang de A ?
b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

2.2 Sujets oraux

ccinp

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
1) Si A est diagonalisable, montrer que A^2 est diagonalisable.
2) à l'aide de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

montrer que la réciproque de la question 1 est fausse.
3) Donner une condition nécéssaire et suffisante sur P, polynôme annulateur de A, pour que A soit diagonalisable.
4) Si A est inversible et A^2 diagonalisable, montrer que A est diagonalisable. On pourra d'abord considèrer le cas où A admet n valeurs propres distinctes.
5) On suppose que A est non inversible et que A et A^2 sont diagonalisables . Montrer que $\ker(A)$=$\mathrm{Ker}(A^2)$.

ccinp

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes.

a) $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.
b) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$, avec A inversible.
c) L'endomorphisme u annule un polynôme de la forme $XQ(X)$, où Q est un polynôme n'ayant pas la racine 0.

ccinp

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.

a) M est-elle diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

b) M est-elle diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.

ccinp

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, u dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u$.

a) Montrer que u est diagonalisable.

b) Décrire les sous-espaces de E stables par u.

ccinp 2021 6445

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) (a) Si $u^2 = 0$, montrer que $\mathrm{rg}(u) \leq \dfrac{n}{2}$.

(b) Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leq \dfrac{n}{2}$. Donner un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = 2$.

b) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u et v commutent.

(a) Montrer que si u admet n valeurs propres distinctes, alors u et v admettent une base commune de diagonalisation.

(b) Montrer que si u et v sont diagonalisables alors u et v admettent une base commune de diagonalisation.

ccinp

1)
a) Déterminer trois polynômes A, B, $C \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que :
$A(-1) = 1, A(0) = 0, A(1) = 0$
$B(-1) = 0, B(0) = 1, B(1) = 0$
$C(-1) = 0, C(0) = 0, C(1) = 1$
b) Montrer que (A, B, C) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2)
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. On note $v \in L(\mathbb{R}_n[X])$ définie par :
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], v(P) = P(-1)A + P(0)B + P(1)C$.
a) Montrer que $\mathrm{rg}(v) \leq 3$. Qu'en déduit-on sur $\ker(v)$?
b) Déterminer une base de $\ker(v)$.
c) Déterminer les valeurs propres de v. L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

original

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $u \in L(E)$ et λ une valeur propre de E d'ordre de multiplicité $m \geq 1$. On pose $v = u - \lambda\,\mathrm{id}_E$.
a) Montrer qu'il existe un polynôme P tel que :

$$E = \mathrm{Ker}(v^m) \oplus \mathrm{Ker}(P(u)) \quad \text{et} \quad E = \mathrm{Ker}(v^{m+1}) \oplus \mathrm{Ker}(P(u)).$$

En déduire que :

$$\mathrm{Ker}(v^m) = \mathrm{Ker}(v^{m+1}).$$

b) Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}(v^m) \oplus \mathrm{Im}(v^m).$$

2.
On considère une autre valeur propre λ' de u, distincte de λ, d'ordre de multiplicité m'. On pose $v' = u - \lambda'\,\mathrm{id}_E$.
a) Montrer que $\mathrm{Ker}(v') \cap \mathrm{Ker}(v^m) = \{0_E\}$.
b) Montrer que $\mathrm{Ker}(v') \subset \mathrm{Im}(v^m)$.

Chapitre 3

Espaces préhilbertiens et euclidiens

mines telecom

Dans $\mathbb{R}^n$ euclidien, on considère la sphére :

$$S_n = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \ ||\vec{x}|| = 1\}.$$

Soient $\vec{x}$, $\vec{y} \in S_n$ où $\vec{x} \neq \vec{y}$.
1) Montrer que $\forall t \in [0,1], ||t\vec{x} + (1-t)\vec{y}|| \leq 1$.
2) Montrer que $\forall t \in]0,1[, ||t\vec{x} + (1-t)\vec{y}|| < 1$.

mines telecom

On munit $E = \mathcal{C}\Big([-1,1], \mathbb{R}\Big)$ du produit scalaire :

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} fg.$$

Pour tout $n \in N$
on introduit le polynôme P_n défini par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big((x^2-1)^n\Big).$$

a) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
b) Montrer que P_n est de degré n et est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur à n.

original

On note E l'ensemble des fonctions f continues sur $]0,1[$ telles que $t \mapsto (tf(t))^2$ soit intégrable sur $]0,1[$.

1) Montrer que $< f, g >= \displaystyle\int_0^1 t^2 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.

2) On pose $f_0 : t \mapsto 1$, $f_1 : t \mapsto t$ et $F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1)$. Donner une base orthonormée de F.

3) Déterminer les réels a, b pour lesquels $\displaystyle\int_0^1 t^2(\ln(t) - at - b)^2\mathrm{d}t$. soit minimale.

Mines mp

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et

$$< P, Q >= \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

a) Justifier l'existence de $< P, Q >$ et que l'on définit ainsi un produit scalare.
On pose $F = \{P \in E \mid P(0) = 0\}$. On cherche à déterminer $d(1, F)$. On note $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ l'orthonormalisée de Schimdt de $(1, X, \ldots, X^n)$.
b) Justifier que P_k est orthogonal à P_k'. Calculer $< P_k, P_k' >$ et en déduire $P_k(0)^2$.
c) Déterminer une base de $F^\perp$ que l'on exprimera dans la base $(P_0, \ldots, P_n$. En déduire $d(1, F^\perp)$ puis $d(1, F)$.

Ker lan

On note $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et

$$\forall f, g \in E < f, g >= \int_0^1 fg + \int_0^1 f'g'$$

a) Montrer que $<, >$ est une produit scalaire sur E.
b) On pose

$$V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } \quad W = \{f \in E \mid f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ et } f'' = f\}.$$

Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux.
Exprimer la projection orthogonale sur W.
c) Soient α et β des réels , on note

$$E_{\alpha,\beta}\{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$$

Calculer

$$\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 f^2 + (f')^2.$$

Chapitre 4

Endomorphismes particuliers des espaces euclidiens

divers

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalire

$$\forall P, Q \in E \ \langle P, Q \rangle = \int_0^1 PQ$$

Montrer que la relation

$$\varphi(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t) \mathrm{d}t.$$

définit un endomorphisme φ de l'espace E.
b) Vérifier que φ est autoadjoint.
c) Calculer la trace de φ.

divers

Montrer que la matrice

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale. Calculer $\det(M)$. Qu'en déduire sur la nature de M. Déterminer son axe.

Divers

Soient $A, B \in \mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $\forall i, a_{i,i} \geq 0$.
b) Montrer que $\mathrm{tr}(AB) \leq \mathrm{tr}\ (A)\mathrm{tr}(B)$.

mines telecom

Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien. Démontrer le résultat du cours :

$$\forall x \in E \ (u(x) \mid x) \geq 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$$

mines telecom

Soit u une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E.
a) Que peut on dire des valeurs propres réelles possibles de u ?
b) Montrer que les sous-espaces propres sont orthogonaux.

divers

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
a) Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \underset{1 \leq i,j \leq n}{\text{Max}} |a_{i,j}| \leq 1$$

b) Montrer que

$$n \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}.$$

divers

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
a) Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \underset{1 \leq i,j \leq n}{\text{Max}} |a_{i,j}| \leq 1$$

b) Montrer que

$$n \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}.$$

divers

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
a) Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \underset{1 \leq i,j \leq n}{\text{Max}} |a_{i,j}| \leq 1$$

b) Montrer que

$$n \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}.$$

mines mp

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T = A^2$.
a) Montrer que $A^3 = I_n$ et que A est orthogonale.
b) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.
Montrer que le noyau de $f^2 + f + Id$ est de dimension impaire et en déduire la forme de la matrice de f dans une base bien choisie.

dernière question difficile

Soit E un espace euclidien de dimension non nulle.
1) Montrer que si p est un projecteur orthogonaux alors p est auto-adjoint.
2) Soient p et q deux projecteurs orthogonaux.
a) Montrer que $p \circ q \circ p$ est un endomorphsime auto-adjoint.
b) Montrer que $\Big(\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)\Big)^{\perp} = \mathrm{Im}(q) \bigcap \mathrm{Ker}(p)$.
c) Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

Algébre

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ (où E est un espace euclidien) et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$f(F^{\perp}) = \Big(f(F)\Big)^{\perp}.$$

mines telecom

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $u = f^* \circ f$. Montrer que $f \in \mathcal{S}(E)$. Que dire de ses valeurs propres.

mines telecom

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour $P = \sum_{i=0}^{2} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{2} b_i X^i$,

on pose $(P \mid Q) = \sum_{i=0}^{2} a_i b_i$ on admet que $(.|.)$ définit un produit scalaire.
On pose $F = \{P \in E, P(1) = 0\}$.
1) F est-il un sous-espace vectoriel de E ? Si oui, donner une base de F.
2) Soit $P = X$. Déterminer $\mathrm{d}(P, F)$. On pourra chercher une base orthonormée de F.

Algébre

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.
a) Comparer les espaces $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^* \circ u)$.
b) Comparer Im (u) et $\mathrm{Im}(u \circ u^*)$.

mines telecom

Soit u un endomorphisme d'une espace euclidien E. On suppose que $u^* \circ u = u \circ u^*$.
1) Donner des exemples d'endomorphismes vérifiant cette propriété.
2) Montrer que les endomorphismes u et u^* ont les mêmes sous espaces propres.
3) Montrer que les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

Algébre

Soit E un espace euclidien. On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endormorphismes antisymétriques c'est à dire
tel que $u^* = -u$.
1) Montrer que $u \in \mathcal{A}(E)$ si et seulement si $\forall x \in E \ (u(x) \mid x) = 0$.
Pour $u \in \mathcal{A}(E)$, quelles sont les valeurs possibles de $\det(u)$?
2) Si $u \in \mathcal{A}(E)$ que peut-on dire de la matrice de u dans une base orthonormée ?
3) Soit F un sous-espace stable par u, montrer que $F^\perp$ est stable par u.
On suppose maintenant que $\text{Ker}(u) = \{0\}$.
4a) Montrer que u^2 est un endomorphisme symétrique. Soit x un vecteur propre de u^2. Montrer que $F = \text{Vect}(x, u(x))$ est stable par u.
4b) Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 & & & & & (0) \\ \lambda_1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & -\lambda_2 & & & \\ & & \lambda_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & (0) & & 0 & -\lambda_p \\ & & & & & \lambda_p & 0 \end{pmatrix}$$

ccinp

Soient u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
On définit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ noté $u \times v$ par :
$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (u \times v)(x) = \langle x, v \rangle u$

a) Valeurs propres et vecteurs propres de $u \times v$? $u \times v$ est-il diagonalisable ?
b) Quel est son adjoint ? A quelle condition sur u et v est-ce un endomorphisme symétrique ?

mines telecom

Soit p une projection vectorielle d'un espace euclidien. Montrer que la projection p est orthogonale si et seulement si :

$$\forall x \in E ||p(x)|| \leq ||x||.$$

mines telecom

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $A^{2023} = A^{2024}$
1) Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \text{rg}(A)$.
2) Ce résultat demeure-t-il vrai si A est seulement diagonalisable ?

Chapitre 5

Algébre générale et arithmétiquue

mines telecom

Soit a un élément d'ordre n d'un groupe multiplicatif $(G, *)$.
a) Montrer que si $d \in \mathbb{N}^*$ divise n alors a^d est d'ordre n/d.
b) Plus généralement, montrer que a^m est d'ordre $n/\text{pgcd}(n, m)$.

ccinp

Soit E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E. 1. Soit $\alpha = \min \text{Sp}(u)$ et $\beta = \max \text{Sp}(u)$. Montrer que :

$$\forall x \in E,\ \alpha\|x\|^2 \leq \langle u(x), x\rangle \leq \beta\|x\|^2.$$

2.
Montrer que $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+ \iff \forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle \geq 0$, puis que

$$\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^* \iff \forall x \in E \setminus \{0\},\ \langle u(x), x\rangle > 0$$

3.
On suppose que $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.
Montrer que $\forall x \in E,\ (u(x) = 0 \iff \langle u(x), x\rangle = 0)$.
4.
Soit v un autre endomorphisme symétrique de E. On suppose
$\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ et $\text{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+$.
a) Montrer que $\text{Sp}(u + v) \subset \mathbb{R}_+$.
b) Montrer que $\text{Ker}(u + v) = \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)$.
c) Montrer que $\text{Im}(u + v) = \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.

Deuxième partie

Analyse

Chapitre 6

première année

mines telecom

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si P est scindé, alors P' aussi. Pour cela :
1) Énoncer le théorèreme de Rolle.
2) Si a est une racine d'ordre k de P, quelle est son ordre dans P' ?
3) Montrer le résultat voulu.

Chapitre 7

Intégrales impropres

7.1 Où passepartout apprend à étudier des cas simples.

l'exercice de base à savoir faire et rédiger

Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(\mathrm{t})}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.

Correction à trous

Soit $f : t \mapsto \dfrac{\ln(\mathrm{t})}{t^2}$ qui est une fonction continue par morceaux définie sur $[1, +\infty[$. Or :

$$\left| \frac{\ln(\mathrm{t})}{t^2} \right| = o(\text{ à compléter})$$

par comparaison usuelle des fonctions à compléter. Or la fonction de Riemann $t \mapsto$ ..... est référencée convergente. Par théoréme de comparaison des fonctions positives. f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Remarques générales

Il ne faut pas oublier de citer la continuité par morceaux et se demander si il est nécéssaire d'ouvrir les bornes finies de l'intervalle. Il y a toujours une étude en $+\infty$ mais pas toujours en 0 ou en 1 (si la fonction y est définie elle y sera continue).

niveau1

Exercices traités

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t(1+t^2)}dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1}dt \ (x \in \mathbb{R}), \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t + 1}dt, \quad , \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}dt$$

Des exercices supplémentaires qui ne seront pas traités en classe

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-t}dt, \quad , \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} \ (x \in \mathbb{R}), \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}dxdx.$$

Utilisation d'une primitive

On peut faire en même temps l'existence et le calcul mais je le déconseille. Attention, ⚠si on a montré qu'une intégrale impropre est convergente, il faut faire attention quand on la manipule (par décomposition en éléments simples, IPP, changements de variables, majoration) à ne pas introduire des intégrales divergentes : on retiendra :

On peut toujours regrouper deux intégrales mais pour casser il faut justifier

primitivation

Exercices traités

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\,(t+1)\,(t+2)}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(t)dt$$

IPP ou passer en complexe est plus rapide pour la deuxième

Des exercices supplémentaires qui ne seront pas traités en classe

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)\,(4+t^2)}dt.$$

Remarques en particulier pour les 5/2

Pour IPP et changement de variables inutile de justifier la régularité des fonctions

intégration par parties

1) C'est facile car c'est dans la partie IPP.

Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt$, de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}dx$ et de $K_n = \displaystyle\int_0^1 (x\ln(x))^n\,dx$ $(n \in \mathbb{N})$.

2) Plus théorique : il faut faire une IPP mais qui doit-on primitiver ?

Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}dt$. On pourra introduire la fonction $x \mapsto -\displaystyle\int_x^{+\infty} f$

3) Trés classique : faire bcp d'IPP Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{x}dx$ converge.

Exercices supplémentaires.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+a\,(\sin(t))^2}$. Justifier que $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+a\,(\sin(t))^2}$ puis calculer I en utilisant le changement de variable $x = \tan(t)$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$.

Déterminer la nature des intégrales suivantes : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\cos(t))^2}{t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{t}dt$.

changements de variables

Existence de $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ puis calcul de I (poser $x = \frac{1}{t}$)

Déterminer la nature de l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx$.

Le retour des Bertrands

a) Déterminer les réels α tel que l'intégrale $\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln(x)} dx$ converge.

b) Déterminer les réels α tel que l'intégrale $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^\alpha}$ converge.

Plus théorique (non traité probablement)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose $g : x \mapsto f\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

a) Prouver que les fonctions $h_+ : x \mapsto \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right) f(x)$ et $h_- : x \mapsto \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right) f(x)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

b) A l'aide du changement de variable $t = x - \frac{1}{x}$, montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ puis que $\int\limits_{\mathbb{R}} g = \int\limits_{\mathbb{R}} f$.

Utilisation du théoréme d'intégration des relations de comparaison

Il faut repérer que c'est bien ce théoréme qu'il faut utiliser : donc il s'agit de traiter une limite (un o, $\sim$) avec la variable qui intervient dans les bornes d'intégration, puis se demander suis-je dans le cas convergent ou divergent ? Enfin de pas oublier de dire que la fonction de comparaison est de signe constant.

Intégration des relations de comparaison

a) Montrer que $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt \underset{x\to 0^+}{\sim} \int_1^x \frac{dt}{t}$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t}dt\right)$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt$.

c) Soit $\varepsilon > 0$, montrer que $\displaystyle\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{1/\varepsilon}^{2/\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}dt$ puis calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt$.

2° Ne sera pas traité en classe.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \alpha > 0$.

a) Prouver que $\displaystyle\int_1^x \frac{f'(t)}{f(t)}dt \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\int_1^x \frac{1}{t}dt\right)$. En déduire qu'il existe $M > 0$ tel que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(x^M\right)$.

b) Montrer que, si $t > 0$, $x \mapsto e^{-tx}f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Pour aller plus loin

Un grand classique, penser à faire une IPP.

1° On pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$. Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}$. Établir que $F(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-x}\right)$. Démontrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)dx$.

2° Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On définit g sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x > 0, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ et $g(0) = f(0)$.

a) Justifier la continuité de g sur $\mathbb{R}_+$.

b) Etablir que

$$\forall X > 0, \quad \int_0^X (g(t))^2\,dt = 2\int_0^X f(t)\,g(t)\,dt - \frac{1}{X}\left(\int_0^X (f(t))^2\,dt\right).$$

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^X (g(t))^2\,dt \leqslant 4\int_0^X (g(t))^2\,dt$.

d) Prouver que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

7.2 Sujets oraux de concours

mines telecom

Etudier l'intégrabilité de :

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}.$$

mines telecom

On définit pour tout $t > 0$, $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{(1+t)^2}$.
1) Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$, puis sur $[1,+\infty[$.
2) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$

mines telecom

Soient a, b deux réels strictement positifs. Déterminer si elle existe :

$$\lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

mines telecom

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge.
2) En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$.
3) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(t)}{t+\cos\,(t)}\mathrm{d}t$ converge.

mines telecom

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t$
1) Justifier l'existence de ces intégrales.
2) Montrer que I_n est constante.
3) Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t = 0$.
4) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (I_n - J_n) = 0$ en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.

Chapitre 8

Séries numériques

8.1 Cours et applications directes

Trois exercices à préparer pour le td études simples de séries

Exercise 1. *a) Donner une condition nécessaire pour qu'une série* $\sum u_n$ *soit convergente, donner également une condition suffisante.*

b) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$ *selon les valeurs de* a *et* b.

Exercise 2. *Déterminer en fonction de* a *la convergence de la série de terme général :*
$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$.

Exercise 3. *Déterminer la nature de* $\sum \dfrac{1}{ln(n)ln(ch(n))}$.

mines telecom 2019 plus difficile

Exercise 4. *Déterminer la nature de* $\sum \sin\left((2+\sqrt{3})^n \pi\right)$.

ccp 2017 on demande la somme !!

Exercise 5. *Calculer*
$\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.
$\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$. *sans utiliser la première.*

mines telecom 2017

Exercise 6. *Soit* $n \geq 1$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$, *on pose*

$$u_{n,\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} ln(k).$$

Discuter de la nature de $\sum u_{n,\alpha}$.

8.2 Exercices Supplémentaires.

minestelecom 2021

Exercise 7. *On définit la série harmonique par*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}.$$

a) La suite $(H_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle ?

b) Montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} ln(n)$.

On pose la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \geq 1, u_n = H_n - ln(n).$$

c) Monter que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers un réel γ.

d) On pose $w_n = u_n - \gamma$. Déterminer un équivalent de w_n.

minestelecom 2019

Exercise 8. *On considère une série $\sum u_n$ à terme positifs et $\sum v_n$ où*

$$v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}.$$

a) Dans cette question uniquement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$. Quelle est la nature de $\sum_{n\geq 0} v_n$?

b) On suppose que $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent montrer que $\sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.

c) On suppose que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, monter que $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Indication du correcteur *Pour la question 3 on pourra raisonner par l'absurde* ccp 2019

Exercise 9. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels décroissante, telle que la série $\sum u_n$ est convergente*

a) *Rappeler la définition de la convergence d'une série, en déduire que si une série converge alors le terme général tend vers 0*

b) *On suppose que $(nu_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ montrer que $\lambda = 0$*

c) *Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.*

d) *Montrer que la série de terme général $(n(u_n - u_{n+1}))_{n\geq 0}$ converge et montrer*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} k(u_k - u_{k+1})$$

Indication du correcteur *Pour la question 3 considèrer v_{2n} et v_{2n+1} où $v_n = nu_n$.*

minestelecom 2018

Exercise 10. *On définit la suite u_n par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 1$ $u_n = (-1)^n \dfrac{cos(u_{n-1})}{n}$.*
Déterminer la nature de $\sum u_n$.

ccp 2017

Exercise 11. *Soit $a > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_1^a (ln(t))^n dt$.*

a) *Etudier la fonction $f_n : t \mapsto t^n$.*
Décrire l'ensemble des $t \geq 1$ tels que $\mid f_n(t) \mid > 1$.

b) *Donner la nature la série de terme général u_n lorsque $a \neq e$.*

c) *Prouver que si $a = e$ alors $u_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$*
où α et β sont deux réels à préciser.
En déduire la nature de la série de terme général u_n.

mines telecom 2017

Exercise 12. *Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n + cos(n)}$.*

a) *Par développement limité*

b) *En étudiant $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \Big(\frac{(-1)^n}{n + cos(n)} - \frac{(-1)^n}{n}\Big)$.*

c) *En montrant que le critére spécial des séries alternées s'applique.*

ccinp 2019

Exercise 13. *On pose*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{ln(k)}{k}.$$

a) *Démontrer que*
$\dfrac{\ln 2}{2} + \displaystyle\int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,dt \leqslant S_n \leqslant \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \int_3^{n} \frac{\ln t}{t}\,dt.$

b) *En déduire un équivalent simple de* S_n.

c) *Démontrer que* $ln(n)^2 - ln^2(n-1) = 2\dfrac{ln(n)}{n} + \dfrac{ln(n)}{n^2} + o\Big(\dfrac{ln(n)}{n^2}\Big).$

d) *Soit* $u_n = \dfrac{ln(n)}{n} - \dfrac{1}{2}\Big(ln^2(n) - ln^2(n-1)\Big)$. *Démontrer que* $\sum u_n$ *est convergente.*

e) *Démontrer qu'il existe un réel* c *et une suite* $(\epsilon_n)_n$ *de limite nulle telle que*

$$S_n = \frac{1}{2}ln^2(n) + c + \epsilon_n.$$

ccinp 2018

Exercise 14. *Soit* $\alpha \in]0, +\infty[$.

a) *Montrer que* $\sum \dfrac{(-1)^n}{\alpha n + 1}$ *converge. On note* S_n *la somme partielle de rang* n *et* R_n *le reste d'ordre* n.

b) *Donner un encadrement de* R_n.

c) *Soit* $k \in \mathbb{N}$. *Calculer* $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha k}\,dt$.

d) *Montrer que* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,dt.$

e) *Calculer* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ *et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

remarque les deux derniéres questions sont faisables sans le cours sur limite et intégrale.

8.3 Exercices proposés en 2023 mines telecom

mines telecom

Montrer que $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, en déduire que

$$\frac{8}{3} \leq \pi \leq \frac{52}{15}.$$

mines telecom

On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$u_n = (-1)^n \frac{\cos(u_{n-1})}{n} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Chapitre 9

Suites et séries de fonctions

9.1 suites de fonctions

Conseils

- Ne pas oublier les valeurs absolues ou les modules.
  - Pour étudier la cvu aprés cvs on peut faire un tableau de variations.
  - Pour utiliser des relations de comparaisons ne pas oublier la sacrosainte régle **SATP**

Trois exercices à préparer pour le td

Exercise 15. *Pour tout entier n, on pose $f_n : x \mapsto xe^{-nx^2}$. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}_+$ puis la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.*

Exercise 16. *Pour tout entier n, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+n^2}$. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}$ puis la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.*

Exercise 17. *Soient $\alpha > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{(nx)^\alpha}{1+nx^2}$. Etudier la convergence simple, uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}_+$, sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.*

D'autres en vrac

Exercise 18. *Pour tout entier n, on pose $f_n : x \mapsto e^{-x}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}_+$ puis la convergence uniforme sur $[0, a]$ $(a > 0)$ et enfin la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.*

Exercise 19. *Pour tout entier n, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x^n}$. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}_+$. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $[0, a]$ $(0 < a < 1)$ puis sur $[b, +\infty[$ $(b > 1)$ et enfin sur $\mathbb{R}_+$.*

Exercise 20. *Déterminer la convergence simple de la suite de fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$. Sur quels types d'intervalles est-elle uniformément convergente ?*

Exercise 21. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $f_n : x \mapsto n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ et $g_n : x \mapsto \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.*

a) Expliciter les limites simples des suites $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ puis prouver que les suites $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et $(g_n)_{n\geqslant 1}$ ne convergent pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *converge uniformément sur tout segment* $[0,a]$ $(a>0)$

c) Prouver que $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}_+,\quad |e^x-e^y|\leqslant e^{\max(x,y)}\,|x-y|$ *. En déduire que la suite* $(g_n)_{n\geqslant 1}$ *converge uniformément sur tout segment* $[0,a]$ $(a>0)$.

9.2 Convergence des séries de fonctions

Conseils

• Pour la convergence normale on peut calculer le sup des f_n ou majorer le sup mais dans tous les cas écrire des normes infinies

• Pour étudier la cvu sans la cvn : on applique le TSSA

• Faire toujours attention aux cas particuliers.

Trois exercices à préparer pour le td

Exercise 22. *Déterminer le domaine de convergence simple puis le domaine de convergence normale des séries* $\sum_{n\geqslant 0} xe^{-n^2x}$. *et* $\sum_{n\geqslant 0} ne^{-n^2x}$.

Exercise 23. *Montrer que la série* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x}{x^2+n^2}$ *converge converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *et converge normalement sur tout segment de* $\mathbb{R}$.

Exercise 24. *On considère* $f_n(x)=nx^2e^{-x\sqrt{n}}$ *pour* $n\geq 0$.
a) Etudier la convergence simple, uniforme, normale de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ *sur* $[0,+\infty[$.
b) Même question sur $[a,+\infty[$ *où* $a>0$.
D'aprés ccinp . On rappelle que si $\sum f_n$ *convergence uniformément alors la suite* (f_n) *converge uniformément vers 0.*

ccinp

Pour $x\in\mathbb{R}^+$, on pose $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n+x}$.

1) Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}^+$, puis qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle et que :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\quad S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

2) Étudier la monotonie de S.

3) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+,\quad S(x+1)+S(x)=\frac{1}{x}$. En déduire un équivalent de S au voisinage de 0.

ccinp

Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(t) = (t^2-1)^{n+1}/(n+1)$.

1. Donner le domaine de convergence D de $\sum f_n$.
2. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$.
3. Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.
4. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.
5. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \int_0^1 (t^2-1)^{n+1}/(n+1)dt$?
6. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Trois exercices à préparer pour le td limites de la somme

Exercise 25. *Soit* $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)\sqrt{x}}{1+n^2x}$. *Déterminer le domaine de définition de* f. *Calculer sa limite puis un équivalent quand* $x \to +\infty$.

Exercise 26. *On pose* $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{x^2}{n(1+x)^2}\right)$.

a) Montrer que f *est bien définie sur* $\mathbb{R}_+$.

b) Prouver que $\lim_{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Exercise 27. *Soit* $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x^2}$.

a) Etudier le domaine de définition de S.

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$ *et proposer un équivalent de* $S(x)$ *quand* $x \to +\infty$.

c) En utilisant la comparaison série-intégrale, proposer un équivalent simple de $S(x)$ *quand* $x \to 0^+$.

Trois supplémentaires

Exercise 28. *¿ l'aide de la comparaison série-intégrale, donner un encadrement de* $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$.

En déduire la valeur de $\lim_{+\infty} S$ *puis, sans calcul, justifier que la la série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{x^2+n^2}$ *ne converge pas uniformément sur tout intervalle non borné de* $\mathbb{R}$.

Exercise 29. *On pose* $f_n : x \mapsto \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ *et* $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

a) Déterminer le domaine de définition de f *et préciser la valeur de* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) ¿ l'aide la comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de f. En déduire un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

Exercise 30. *On pose* $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$. *Préciser le domaine de définition de f et calculer* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Trois exercices à préparer pour le td continuité de la somme

Exercise 31. *Prouver que* $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Exercise 32. *Soit* $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\operatorname{sh}(nx))^2}$. *Expliciter son domaine de définition et étudier sa continuité.*

Exercise 33. *Donner le domaine de définition de* $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$ *et justifier sa continuité.*

Exos supplémentaires

Exercise 34. *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et* $\varphi : [-a,a] \to \mathbb{R}$. *On définit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par :* $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$. *On suppose qu'il existe* $K \in \mathbb{R}_+$ *pour lequel* $\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi(x)| \leqslant K|x|$.

a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge sur* $[-a,a]$ *et que sa somme est continue.*

b) Montrer que S est la seule fonction continue f vérifiant l'équation $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x)$ *avec la condition* $f(0) = 0$.

Exercise 35. *Soient* (a_n) *une suite réelle de limite nulle,* $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continue et croissante sur* $[0,1]$.

Montrer que $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left(G\left(x^k\right) - G\left(x^{k+1}\right)\right)$ *est définie et continue sur* $[0,1]$.

Trois exercices à préparer pour le td dérivabilité de la somme

Exercise 36. *Montrer que* $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ *est de classe* C^∞ *sur* $[1,+\infty]$ *puis sur* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$.

Exercise 37. *Soit* $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. *Etablir que f est de classe* C^∞ *sur* $]0,+\infty[$.

Exercise 38. *Prouver que la fonction* $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n!}$ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

exercices supplémentaires.

Exercise 39. *Effectuer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ de* $\dfrac{1}{n^2+x^2}$. *En déduire que* $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n^2+x^2}$ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

Trois exercices à préparer pour le td études générales

Exercise 40. *On pose* $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$.

a) *Montrer que* f *est définie et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$.

b) *Justifier que* $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) + f(x+1) = \ln(x+1) + f(1)$.

c) *En déduire* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et proposer un équivalent simple de* $f(x)$ *quand* $x \to +\infty$.

Exercise 41. *Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

a) *Etudier sa continuité et sa dérivabilité sur* $]0,+\infty[$.

b) *Préciser le signe de* f *ainsi que sa monotonie et l'allure du graphe de* f *sur* $]0,+\infty[$.

c) *Déterminer les limites* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Exercise 42. *On considère* $f : x \mapsto \sum_{nn=1}^{+\infty}\left(\dfrac{x}{n} - \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\right)$. *Justifier que* f *est définie sur* $\mathbb{R}_+$, *qu'elle est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+$ *et qu'elle réalise une bijection de* $\mathbb{R}_+$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

9.3 Sujets oraux mines +ccinp

mines telecom 2018

Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$.

a) Donner l'ensemble de définition D de S.

b) Donner le signe de la dérivée de S sur $D\cap[0,+\infty[$. Limite de S aux bornes de $D\cap[0,+\infty[$.

c) Donner le signe de la dérivée sur D entier

indications fournie au cours de l'oral 2. Majorer le terme général
3. Essayer $(1-x)S'(x)$, séparer la somme en deux, quelle est la monotonie de $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$?, quel est le signe de la somme d'une série alternée.

mines telecom 2017 plus facile pas possible

On pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

Etudier la convergence simple de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$. On note S la somme.

Donner l'ensemble de définition de S ainsi que la valeur de S.

Etudier la convergence normale et la convergence uniforme de la série.

mines telecom 2018

a) Déterminer l'intervalle de définition de la série de fonctions $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$. Donner un équivalent simple de f en 0.

b) Mêmes questions pour $g : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2(nx)}$.

mines telecom 2018

On pose pour tout $n \geq 2$, $\forall x \in [0, +\infty[,\ u_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

Etudier les convergences simple, absolue, normale, uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0, +\infty[$.

mines telecom 2019

Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\exp\Big(-(2n+1)x\Big)}{(2n+1)^2}$.

a) Pour $a > 0$, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, +\infty[$, puis calculer f" à l'aide de fonctions usuelles.

b) Pour tout $x > 0$, montrer que $f'(x) = -\displaystyle\int_x^{+\infty} f"(t)\mathrm{d}$.

c) calculer $f'(x)$.

d) Montrer que $t \mapsto \ln(\mathrm{th}t)$ est intégrable sur $[x, +\infty[$ pour tout $x > 0$.

mines telecom 2021

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}\sin(nx)\cos^n(x)$.

a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier la parité et la périodicité de f.

c) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$. Exprimer f'.

d) En déduire une expression de f.

ccinp 2021

Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

a) Montrer que F est bien définie.

puis montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et montrer que $F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$

b) A l'aide du critére spécial des séries alternées, trouver la monotonie de F c) Simplifier

$$F(x) + F(x+1)$$

puis donner un équivalent de F en 0 et en $+\infty$.

ccinp 2021

on pose, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(x\ln(x))^n}{n!}. \end{cases}$$

a) Montrer la convergence simple sur $\mathbb{R}_+^*$ de $\sum f_n$ et calculer la somme.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0,1]$ et déterminer son intégrale.

c) Démontrer l'intégrabilité de $x \mapsto x^x$ sur $]0,1]$ et exprimer son intégrale sous forme de somme.

ccinp 2019

on définit une suite de fonctions : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq 0$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x}$

On pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

a) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$

c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Donner un équivalent de f en 0

ccinp 2018

On considère pour tout $x \in]0,+\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $u_n(x) = \dfrac{a^n}{x+n}$ avec a un réel tel que $|a| \leq 1$ et $a \neq 1$.

a) Etudier la convergence simple uniforme et normale de cette série.

b) Notons S la somme de cette série.

(a) Montrer que que S est continue sur $]0,+\infty[$.

(b) Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

(c) Montrer que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x(1-a)}$.

ccinp 2018

Soit $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de réels strictement positifs, de limite $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$f_n(x) = (-1)^n e^{-\lambda_n x} \text{ et } g_n(x) = \frac{(-1)^n}{\lambda_n} e^{-\lambda_n x}.$$

a) Etudier la convergence simple de la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$.

b) Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$

c) Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ de la série $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$.

d) On pose $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} S$ est définie puis que :

$$\int_0^{+\infty} S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}.$$

mines telecom

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} \mathrm{d}t$.

1) Quel est le domaine de définition de f ?

2) Pour $x \in]0,1[$, calculer $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+x^2}}$. On pourra utiliser le changement de variable $u = \dfrac{t}{x}$ et utiliser la fonction $t \mapsto \ln\big(t + \sqrt{1+t^2}\big)$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+x^2}} \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$.

4) Montrer que $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$.

mines telecom

Soit $f_n(x) = \dfrac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$.
1) Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction g.
2) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
3) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$. Peut on appliquer un des théorémes du cours d'interversion limite et intégrale ?

mines telecom

Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x^2n^2}$ où $x \in \mathbb{R}$.
1) Quel est l'ensemble de définition de S ?
2) Montrer la continuité de S.
3) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.
4a) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\mathrm{d}t$ pour $x \in]0, +\infty[$.
On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
4b) Donner un équivalent de S en 0.

mines telecom

Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

9.4 Tcd et autres

ccinp 2022

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$$

a) Montrer l'existence de I_n.
b) Etudier la convergence de $(I_n)_{n\geq 0}$.
c) Trouver une relation entre I_n et I_{n+1}
d) Retrouver le résultat de la question 2

Mines telecom 2016

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 t^n (ln(t))^2 \mathrm{d}t$$

a) Montrer l'existence de I_n et calculer sa valeur.

b) On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(ln(x))^2 \mathrm{d}x}{1+x^2}$. Montrer que :

$$I = 2\int_0^1 \frac{(ln(x))^2 \mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

c) Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

magistere 2017

Soit a et b deux réels strictement positifs montrer que :

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nb+a}.$$

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Divers

Montrer que :

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}\Big) \mathrm{d}t = \gamma.$$

Divers

Montrer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n (1-t)^n \mathrm{d}t = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Divers

On note :

$$I_p = \int_0^{\pi} \frac{e^{ip\theta}}{2+e^{i\theta}} \mathrm{d}\theta.$$

a) En écrivant :

$$\frac{e^{ip\theta}}{2+e^{i\theta}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{e^{ip\theta}}{1+\frac{e^{i\theta}}{2}}\Big)$$

écrire I_p à l'aide d'une somme.

b) En déduire que

$$I_p = \pi(-1)^p 2^p.$$

Chapitre 10

Séries entières

10.1 Pour le td

Calcul de Rayon

Préciser le rayon de convergence des séries suivantes :

$$(1)\quad:\quad \sum_{n} \ln\left(1+\frac{1}{8^n}\right) z^{3n},\ (2) : \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{n!}}{n^3},\ (3) : \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2} z^n,\ (4) : \sum_{n\geqslant 1} e^{(\ln(n))^2} z^n$$

D'autres en plus pour le plaisir

$$(5) \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!} z^n,\ (6) : \sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}} z^n$$

$$(7) : \sum_{n\geqslant 1} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2} z^n$$

Calcul de Somme

Rayon de convergence de puis calcul de la somme de

$$(1)\quad:\quad \sum_{n\geqslant 0} 2^{n(-1)^n} z^n,\ (2) : \sum_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n,\ (3) : \sum_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{n!} x^n$$

$$(4)\quad:\quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ (5) : \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+1)},\ (6) : \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n n x^{2n+1},\ (7) : \sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n.$$

DSE

Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{x}$ se prolongent en deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$(1) : \int_0^1 f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \times n!},\quad (2) : \int_0^1 g = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

En déduire les valeurs approchées à $0,01$ près de ces deux intégrales.

Intégration

Calculer $I_k = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{z - e^{it}} dt$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $|z| \neq 1$ par un développement en série.

Divers

Déterminer le développement en série entière de

$$(1) : f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{(1-x)^2},\ (2) : g : x \mapsto \frac{1-\sqrt{1-4x}}{x},\ (3) : x \mapsto \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right).$$

Divers

Donner le développement en série entière des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{1}{1 - 2x\cos(\alpha) + x^2},\ g : x \mapsto \arctan\left(\frac{x\sin(\alpha)}{1 - x\cos(\alpha)}\right).$$

Divers

Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière et préciser le rayon de convergence :

$$f : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2}, \quad g : x \mapsto e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2} dt,\ h : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x\sin(t)) dt.$$

Divers

On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que f est développable en série entière. Préciser son rayon de convergence.

Terme général défini par récurrence

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$. Prouver que le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est non nul et calculer sa somme. En déduire la valeur de a_n.

2) On pose $a_0 = 1$ puis $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}a_k$.On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que la série entière $\sum u_n x^n$ converge sur $]R, R[$ et on note $S(x)$ sa somme.

a) Pour $x \in]-R, R[$, calculer $(S(x))^2$ et en déduire que

$$\forall x \in]-R, R[\,, \quad x(S(x))^2 - S(x) + 1 = 0.$$

b) Montrer que $S(0) = 1$ et que $\forall x \in]-R, R[\setminus \{0\}, \quad S(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \dfrac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$ et que $R = \dfrac{1}{4}$.

3) On considère la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $I_0 = I_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2, \quad nI_n = I_{n-1} + I_{n-2}$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} I_n x^n$ converge si $x \in]-1, 1[$. Soit $S(x)$ sa somme.

b) Montrer, pour $x \in]-1, 1[$, que $S'(x) = (1 + x)S(x)$.

4) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle aue $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}$. On pose $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{(\ln(2))^n}$. Qu'en déduit-on sur le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_n a_n x^n$?

b) Calculer f sur $]-R, R[$. En déduire R puis que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}$

5)

a) Décomposer la fraction $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}$ en éléments simples et en déduire le développement en série entière de f autour de 0.

b) Justifier que $\forall x \in [-1, 1], \quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec a_n le nombre de décomposition de n sous la forme $n = 2x + 3y$ avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. En déduire un équivalent de a_n quand $n \to +\infty$.

Une DSe l'autre pas

1) Soient $a > 0$ et $f \in C^{\infty}\left(]-a,a[\,,\mathbb{R}\right)$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-a,a[\,, \quad f^{(n)}(x) > 0$.

a) Si $|x| < r < a$, montrer : $\left| f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \left|\frac{x}{r}\right|^{n+1} f(r)$.

b) Montrer que f est développable en série entière sur $]-a,a[$.

2) Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} e^{in^2 x}$. Montrer que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et que $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \left|f^{(p)}(0)\right| \geqslant \dfrac{p^{2p}}{e^p}$. Que dire du rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$? En déduire que f n'est pas développable en série entière.

10.2 Oraux de concours

mines telecom

Quel est le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$, l'ensemble de définition de la somme ainsi qu'une expression de la somme ? En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

mines telecom

Soit $r > 0$. Soit (a_n) la suite définie par

$$a_n = \begin{cases} r^{\sqrt{n}} & \text{si} \quad n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer le rayon de la série entiére $\sum a_n x^n$.

mines telecom

1) Donner le DSE de la fonction sin ainsi que son rayon de convergence. Indiquer également le mode de convergence d'une série entiére (cvs cvu cvn sur quels domaines ?)

2) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

mines telecom

On note S l'ensemble des suites numériques $a = (a_n)_{n\geq 0}$ telles que $\sum a_n$ converge et T l'ensemble des suites vérifiant les deux conditions suivantes

1) Le rayon R de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ vérifie $R \geq 1$.

2) $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ admet une limite finie quand x tend vers 1^-. Cette limite est notée $l(A)$.

1a) La série de terme $(-1)^n$ est-elle convergente ?

1b) La série de terme général $\dfrac{1}{n!}$ est-elle convergente ?

2a) La suite $(-1)^n$ est-elle dans T ? Si oui quelle est la valeur de $l(A)$

2b) Même question avec la suite $\dfrac{1}{n!}$.

Chapitre 11

Espaces vectoriels normés

11.1 Continuité des applications linéaires

mines telecom

On munit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme 1 définie par $\forall f \in E,\ \|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt$.

On pose $T : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ f & \mapsto & Tf : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt \end{array} \end{array}$ et on admet que T est un endomorphisme de E.

Démontrer que T est continu sur $(E, \|\ \|_1)$ et déterminer $|||T|||$.

Algébre et Analyse

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\ \|_\infty$ définie par : $\forall P \in E,\ \|P\|_\infty = \text{Sup}\left\{\left|\dfrac{P^{(n)}(0)}{n!}\right|,\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

a) Vérifier briévement que $\|\ \|_\infty$ est une norme sur E.

b) Soit f l'endomorphisme de E défini par $\forall P \in E,\ f(P) = XP$. Démontrer que l'application f est continue sur $(E, \|\ \|_\infty)$ et déterminer $|||f|||$.

Algébre et Analyse

On munit $E = \ell^\infty(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées de la norme $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

On considère l' endomorphisme Δ de $\ell^\infty(\mathbb{C})$ défini par :

$\forall u \in E,\ \Delta(u) = v$ où $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que Δ est continue sur $(E, \|\ \|_\infty)$ et calculer sa norme.

Algébre et analyse

On munit $E = \ell^\infty(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées de la norme $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

On considère l' endomorphisme φ $\ell^\infty(\mathbb{C})$ défini par :

$\forall u \in E,\ \varphi(u) = w$ où $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que φ est continue sur $(E, \|\ \|_\infty)$ et calculer sa norme.

11.2 Topologie

11.2.1 suites et séries dans les evns

classiques

a) (a) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $(A^p)_{p\geqslant 0}$ converge. Montrer que sa limite est projecteur.

(b) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $3A^2 = 2A + I_n$. Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge.

(c) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $3A^3 = I_n + A + A^2$. Montrer que $(A^p)_p$ est une suite convergente. Déterminer sa limite.

b) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ soit bornée. On pose $B_p = \dfrac{1}{p}\left(I_n + A + \cdots + A^{p-1}\right)$

(a) Etablir la convergence de $(B_p x)_{p\in\mathbb{N}}$ lorsque $x \in \operatorname{Ker}(A - I)$ et lorsque $x \in \operatorname{Im}(A - I)$.

(b) Montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(A - I) \oplus \operatorname{Im}(A - I)$.

(c) Démontrer la convergence de $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et caractériser géométriquement sa limite.

c) Soit $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$, $k \in [0, 1[$ et $\|\|$ une norme sur $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad \|Ax\| \leq k\|x\|$.

(a) Montrer que la matrice $I_p - A$ est inversible.

(b) On considère la suite définie par $X_0 \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et la récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n + B$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(I_p - A)^{-1}(B)$

11.3 Ouverts fermés

Pour bien débuter

a) Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{C}$ telles que la série $\sum |a_n|$ converge. Si $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ appartient à E, on pose

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

a) Montrer que $\|\,.\,\|$ est une norme sur E.
b) Soit

$$F = \left\{ a \in E / \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}$$

L'ensemble F est-il ouvert ? fermé ? borné ?

b) Soient $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ normé par $\|\,.\,\|_\infty$ et la partie

$$A = \left\{ f \in E / f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1 \right\}$$

a) Montrer que A est une partie fermée.
b) Vérifier que

$$\forall f \in A, \|f\|_\infty > 1$$

c) On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
a) Montrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(\mathbb{R})$.
b) Est-il ouvert ?
c) Est-il fermé ?

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, O_n désigne l'ensemble des polynômes de degré n scindés à racines simples.

(a) Montrer que $P \in O_n$ ssi (il existe $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ tels que $\forall i \in \{0,..,n\}, \quad P(a_i)P(a_{i+1}) < 0$).

(b) Justifier que $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (P(a_i)\,P(a_{i+1}))_{0\leq i\leq n}$ est continue. En déduire que O_n est ouvert.

densité et matrices

a) Montrer la continuité du déterminant puis montrer que $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K}))$ est une partie ouverte de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.
b) Montrer que l'ensemble des projecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie est une partie fermée de $\mathcal{L}(E)$.
c) Montrer la fonction $M \to M^{-1}$ définie sur $(Gl_n(\mathbb{K}))$ est continue. d) Une démonstration de CH
i) Montrer que l'application qui a une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associé son polynôme caractéristique χ_M est continue.
On rappelle que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ (voir...)
ii) Montrer l'égalité $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour toutes matrices A et B inversibles.
On rappelle que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).
iii) Montrer que l'égalité $\chi_A(A) = 0$

ccinp 2018

Soient E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E. On note $\mathring{A}$ l'intérieur de A

a) Montrer que $\mathring{A}$ est un ouvert.

b) On suppose que A est un sous-espace vectoriel de E. montrer que si $\mathring{A} \neq \emptyset$ alors $A = E$.

c) On suppose que $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A est l'ensemble des matrices nilpotentes de E. On veut montrer que $\mathring{A} = \emptyset/$

   (a) Montrer que $\mathring{A} \neq \emptyset$ alors l'intérieur de $\mathrm{Vect}(A)$ est non vide.

   (b) Aboutir à une contradiction.

centrale mais hyperclassique

Soient E un espace normé de dimension quelconque et u un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant \|x\|$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k$$

a) Simplifier $v_n \circ (u - \mathrm{Id})$.
b) Montrer que

$$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \{0\}$$

c) On suppose E de dimension finie, établir

$$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = E$$

d) On suppose de nouveau E de dimension quelconque.
Montrer que si

$$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = E$$

alors la suite (v_n) converge simplement et l'espace $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ est une partie fermée de E.
e) Etudier la réciproque.

densité

Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, on pourra considèrer, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices $A - \lambda I_n$.

11.4 Compacité

Pour bien débuter

Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $(u_n + \frac{1}{2}u_{2n})_{n \geq 0}$ converge vers 0.
Montrer que si a est une valeur d'adhérence de (u_n) alors $-2a$ l'est aussi. En déduire que (U_n) ne serait pas bornée. Conclure en précisant le théorème du cours.

le plus classique du monde.

Soient K un compact non vide d'un espace normé E et $f : K \to K$ telle que :

$$\forall (x,y) \in K^2,\ x \neq y \Longrightarrow ||f(x) - f(y)|| < ||x - y||.$$

a) Montrer que f possède au plus un point fixe. *que veut dire cette phrase...on suppose existence de deux points fixes c_1 et c_2 et on montrent qu'ils sont égaux.*
b) Justifier qu'il existe $c \in K$ tel que :

$$\forall x \in K,\ ||f(x) - x|| \geq ||f(c) - c||.$$

c'est une question d'existence, association d'idée compacité existence...il faut voir c comme le minimum d'une fonction continue que un compact, quelle fonction that is the question
c) Montrer que f admet un point fixe .
Clairement le candidat est c de la question précédente, si $f(c) \neq c$ alors on peut améliorer le record du monde.

vive les suites extraites

Soient K et L deux compacts. Montrer que

$$K + L = \{x + y \mid x \in K, y \in L\}$$

est aussi compacte.

vive les suites extraites

Soient K et L deux compacts non vides disjoints .
Montrer que.

$$\mathrm{d}(K, L) = \inf\{||x - y|| \mid x \in K, y \in L\} > 0.$$

Montrer, par un exemple, que le résultat est faux si on suppose seulement K et L fermés.

presque le contre ex du cours

On munit $E = \mathcal{C}\big([0, 2\pi], \mathbb{R}\big)$ de la norme $||.||_2$ définie par :

$$||f||_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(f(t)\big)^2 \mathrm{d}t}.$$

On considère les fonctions $c_k : t \mapsto \cos(kt)$.
a) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ distincts. Calculer

$$||c_m - c_n||_2^2$$

b) En déduire que la boule unité fermée de E n'est pas compacte.

généralisation du précédent

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normée E.
a) Montrer que pour tout $a \in E$ il existe $x \in F$ vérifiant

$$\mathrm{d}(a, F) = ||a - x||.$$

b) On suppose $F \neq E$. Montrer qu'il existe $a \in E$ vérifiant

$$\mathrm{d}(a, F) = 1 \quad \text{et } ||a|| = 1.$$

Pour cela on pourra démontrer
c1) $\forall y \in F$, $\mathrm{d}(a, F)$=$\mathrm{d}(a - y, F)$.
c2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{d}(\lambda a, F)$ =$\mathrm{d}(a, F)$.
Et pour $b \notin E$ on obtient x par la première question et on utilise c1 et c2
On suppose l'espace vectoriel E de dimension infinie
c) Montrer qu'il existe une suite $(a_n$ d'éléments de E vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, ||a_n|| = 1 \quad \text{et } \mathrm{d}\big(a_{n+1}, \mathrm{Vect}(a_0, \ldots, a_n)\big).$$

d) Conclure que la boule unité de E n'est pas compacte.

retour des valeurs propres

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont tous les coefficients sont positifs. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ on écrit $x \leq y$ si $\forall i, x_i \leq y_i$.
Soit

$$S = \{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \lambda x \leq Ax\}$$

a) Soit $\lambda \in S$, montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$0 \leq x, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \text{ et } \lambda x \leq Ax.$$

b) Soit λ une valeur propre complexe. Montrer $\mid \lambda \in S$.
c) Montrer que S est majorée et expliciter un majorant
d) Montrer que S est une partie compacte.
e) Soit α =max$S$. Montrer que α est une valuer propre de A strictement positive associée à un vecteur propre strictement positif.

Chapitre 12

Intégrales à paramètres

Conseils

Quand on cherche à appliquer les théorèmes, il faut :

- Ne pas oublier les valeurs absolues ou les modules
- Vérifier que ces inégalités sont vraies (attention à $x > 1$ et $x < 1$ de même pour t).
- Vérifier si la fonction dominante est indépendante de x.
- Ne pas se tromper dans les dérivations quitte à revenir à exp(ln..)

Trois exercices : le premier tiers cherche le premier et trouve un volontaire pour présenter au tableau et le deuxième...

Premier tiers

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est définie et positive sur $]-1, +\infty[$.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser sa monotonie.
c) Former une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ pour tout $x > -1$.
d) On pose pour $x > 0$,

$$\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$$

Montrer que

$$\forall x > 0, \varphi(x+1) = \varphi(x)$$

Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

e) Déterminer un équivalent à f en -1^+.

Deuxième tiers

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et qu'elles vérifient l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

b) Montrer que f et g sont continues en 0
c) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Troisième tiers

a) Justifier que l'intégrale suivante est définie pour tout $x > 0$

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

b) Justifier la continuité de f sur son domaine de définition.
c) Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.
d) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$ et la limite de f en $+\infty$.

Exercices supplémentaires

1) Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + x^3 + t^3}$$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$.
b) A l'aide du changement de variable $u = 1/t$, calculer $f(0)$.
c) Montrer que f est continue et décroissante.
d) Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$.

---

2) Soit

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}t}{1 + t^3}$$

a) Calculer $g(0)$ en réalisant le changement de variable $t = 1/u$.
b) Etudier les variations de g sur son domaine de définition.
c) Etudier la limite de g en $+\infty$.

---

3) Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t + x}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est définie, continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Etudier les variations de f.
b) Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.
c) Déterminer un équivalent de f en 0^+ et $+\infty$.

---

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$.
b) Calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.
c) On note g l'application définie par $g(x) = f(x^2)$. Montrer

$$g(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

d) Conclure

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercices supplémentaires

5) Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et solution de l'équation différentielle

$$y - y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

---

6) Soit

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que F est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de limite nulle en $+\infty$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

Mines telecom

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\big(xt\big)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.
1) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u)| \leq |u|$.
3) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

mines telecom

On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que F est définie sur $]0, +\infty[$.
2) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.
3) Calculer F' sur $]0, +\infty[$.

mines telecom

On suppose que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 1 + \int_0^x f(t)\cos\big(x-t\big)\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que f est deux fois dérivables.
2) Déterminer f

mines telecom

1) Donner l'ensemble de définition de F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}}{t} \cos(xt)\mathrm{d}t.$$

2) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition et préciser F'.
3) Exprimer F à l'aide fonctions usuelles.

mines telecom

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$.
1) Quel est le domaine de définition de f ?
2) Pour $x \in]0,1[$, calculer $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+x^2}}$. On pourra utiliser le changement de variable $u = \dfrac{t}{x}$ et utiliser la fonction $t \mapsto \ln\big(t + \sqrt{1+t^2}\big)$.
3) Montrer que $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+x^2}} \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$.
4) Montrer que $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$.

Chapitre 13

Equations différentielles

13.1 Equations scalaires du premier ordre

Pour débuter

Résoudre sur $]1,+\infty[$ l'équation différentielle

$$y' - \frac{x}{x^2-1}y = 2x$$

avec Dse

On considère l'équation différentielle :

$$(x^2+x)y" + (3x+1)y' + y = 0. \quad E$$

a) En cherchant les solutions dse(0) , trouver une solution simple de E (autre que 0).
b) Résoudre (E) sur tout intervalle de $\mathbb{R}$

avec Dse

On considère l'équation

$$(E) : (1-x)y' - y = g$$

où $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est donnée.
a) Résoudre l'équation homogène associée.
b) On suppose que la fonction g est développable en série entière

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

de rayon de convergence $R \geqslant 1$.
Montrer que (E) admet au moins une solution développable en série entière en 0,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

de rayon de convergence $R' \geqslant 1$ et exprimer les a_n en fonction de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ccinp 2021

Soit l'équation différentielle $(E) : (x^2 - 4x)y' + (2 - x)y = 4$.
1) Chercher une solution polynomiale
2) résoudre (E) sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 4[$ et $]4, +\infty[$.
3) Faire le raccordement des solutions pour en déduire la solution sur $]-\infty, 4[,]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$.

ccinp 2023

On définit la suite (I_n) ainsi $I_0 = I_1 = 1$ et $\forall n \geq 2 n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.
1) Montrer que le rayon de convergence de f est $R \geq 1$.
2) Donner une équation différentielle vérifiée par f.
3) Donner l'expression de f et le rayon de convergence et exprimer I_n.

telecom 2023

Donner les fonctions 2π périodiques qui vérifient $f'(x) = f(x - \pi) + \sin(x)$

telecom 2023

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t) \mathrm{e}^{-xt} \mathrm{d}t$.
1) Ensemble de définition de F.
2) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
3) Déterminer une équation différentielle dont F est solution sur $]0, +\infty[$, puis résoudre cette équation différentielle.

13.2 Equations scalaires du second ordre

Autour du théorème de Sturn

a) On note (E_1) et E_2 les équations différentielles :

$$y" + \omega^2 y = 0 \qquad z" + \mu^2 z = 0$$

(a) Expliciter les solutions ainsi que les racines de ces solutions.

(b) Montrer que, si $0 < \omega < \mu$ alors entre deux racines de y il existe une racine de z.

b) Soient maintenant q et r deux fonctions continues sur $I = [a, b]$ telles que $r(x) \geq q(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.
On note (E_1) et E_2 les équations différentielles :

$$y" + qy = 0 \qquad z" + rz = 0$$

(a) Montrer que toute solution non nulle de $y" + qy = 0$ on a $y(x_0) = 0$ implique $y'(x_0) \neq 0$.

(b) Soient x_0 et x_1 deux racines consécutives de y, solution non nulle de (E_1) , que dire des signes des dérivées $y'(x_0)$ e t$y'(x_1)$?

(c) Soit z une solution de E_2. On pose
$w(x) = \begin{bmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{bmatrix}$
Calculer $w'(x)$ et montrer que

$$w(x_1) - w(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} (q(t) - r(t))y(t)z(t)dt.$$

(d) En comparant les signes de deux expressions de $w(x_1) - w(x_0)$, montrer que pour toute solution z de (E_2) , z a un zéro dans $]x_0, x_1[$ ou $z(x_0) = z(x_1) = 0$.

(e) Montrer qu'une solution de (E_1) est soit proportionnelle à y, soit s'annule une seule fois dans $]x_0, x_1[$.

D'autres résultats possibles :
Soit $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue non nulle.
On se propose de montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + q(x)y = 0$ s'annulent.
Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que f est une solution ne s'annulant pas.

(a) Justifier que f est de signe constant.
Quitte à considérer $-f$ au lieu de f, on peut supposer

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$$

(b) Étudier le signe de f''.

(c) Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. Quelle est l'équation de la tangente à f en a ?

(d) Montrer que le graphe de f est en dessous de sa tangente en a.

(e) En déduire que $f'(a) = 0$ et conclure.

ccinp 2023

Soit l'équation différentielle (E) : $4xy" + 2y' - y = 0$. 1) Chercher les solutions sous forme d'une série entière.
2) Faire le changement de variables $x = t^2$ et montrer que (E) est équivalente à $z" - z = 0$ en déduire les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) Faire le changement de variables $x = -t^2$ et montrer que (E) est équivalente à $z" + z = 0$ en déduire les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$.
4) Faire le raccordement des solutions pour en déduire la solution sur $\mathbb{R}$.

ccinp 2023

On considère A, B, C des v.A indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Soit l'équation différentielle $Ay" + By' + Cy = 0$ et $p(\lambda)$ la probabilité que les solutions de cette équations différentielles s'annulent une infinité de fois.
Montrer que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} p(\lambda) = 1$

13.3 système différentiels

système d'équations différentielles d'ordre 1 à coefficients constants

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 + \mathrm{e}^t \\ x_2' = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = x + 8y + \mathrm{e}^t \\ y' = 2x + y + \mathrm{e}^{-3t} \end{cases}$$

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = x + 8y + \mathrm{e}^t \\ y' = 2x + y + \mathrm{e}^{-3t} \end{cases}$$

ccinp 2022

On considère le système

$$\begin{cases} x' & = & z + \cos(t) \\ y' & = & y + e^{3t} \\ z' & = & x + \sin(t) \end{cases}$$

1) résoudre
2) Trouver la solution particulière telle que x et z soient bornées sur $\mathbb{R}^+$ et que $x(0) = z(0)$.

Un plus théorique

exo 1 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on considère l'Èquation différentielle (E) : $\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ avec $X : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On munit $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa norme euclidienne canonique.

a) On suppose que A est antisymétrique. Montrer que X est de norme constante.

b) On suppose que X est de norme constante pour tout $X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X_0^T \left(A^T + A\right) X_0 = 0$. En déduire que A est antisymétrique.

exo 2 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que toute solution de $(E) : Y'(t) = AY(t)$ est bornée.

a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $X \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$. Expliciter la solution de (E) vérifiant $Y(0) = X$. En déduire que $\lambda \in i\mathbb{R}$.

b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. On suppose qu'il existe $X \in \mathrm{Ker}\left((A - \lambda I_n)^2\right) \setminus \mathrm{Ker}((A - \lambda I_n))$. Calculer $Y(t)$ lorsque $Y(0) = X$. En déduire une contradiction.

c) Prouver que A est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$.

exo3 Soit $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$ et $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Montrer que toute solution de $X' = (\lambda I_n + N) X$ tend vers 0 en $+\infty$.
exo 4 Soit $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. RÈsoudre l'Èquation diffÈrentielle $x' = a \wedge x$.

Chapitre 14

Calcul différentiel

mines telecom

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.
On étudie l'application $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = x^T A x + b^T x + c.$$

a) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
b) Déterminer les points critiques de F.
c) Calculer la matrice hessienne de F en tout point de $\mathbb{R}^n$.
d) A quelle condition F admet elle un minimum ?

mines telecom

Trouver les extremums locaux et globaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

Ecrit 2023 ccinp

On définit la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^2$

f) Établir que $e^{-x} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$

g) Démontrer que f admet un unique point critique (x_0, y_0) sur $\mathbb{R}^2$

h) À l'aide de la matrice Hessienne, démontrer que f admet un extremum local en (x_0, y_0). Est ce un minimum ou un maximum ?

mines telecom

Soient a et b deux réels strictement positifs.
Déterminer le maximum de $f : (x, y) \mapsto xy$ sous la contrainte

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ecrit 2023 ccinp maroc

Un problème d'extremum
(Noté 4 points sur 20)

On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

1. Quelques propriétés de la fonction F

1.1 Justifier que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2$.

1.2 Montrer que la fonction F admet un unique point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et le déterminer.

2. Étude de la nature du point critique (x_0, y_0)

2.1 Calculer les dérivées partielles secondes de F au point (x_0, y_0).

2.2 À l'aide de la matrice Hessienne, montrer que la fonction F présente un extremum local au point (x_0, y_0). Est-ce un minimum ou un maximum local ?

3. Étude plus approfondie de l'extremum en question

3.1 Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; on pose $u = x$ et $v = y - 3$. Vérifier que $F(x,y) = u^2 + uv + v^2 - 9$.

3.2 Montrer qu'en fait la fonction F présente un extremum absolu strict au point (x_0, y_0). *On pourra remarquer que*

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad u^2 + uv + v^2 = \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4}$$

Analyse

On note Γ la courbe du plan d'équation $x^3 + y^3 = 1$.
Déterminer le maximum de la fonction. $f : (x,y) \mapsto xy$ sous la contrainte sur Γ

Analyse

On considère l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique et u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Calculer la différentielle de la fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $(u(x) \mid x)$.

Analyse et algébre

Soit $f : (x,y) \mapsto xy(1-x-y)$ définie sur :

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

1) Justifier que f admet un maximum sur T.
2) Déterminer sa valeur.

Troisième partie

Probabilités

Chapitre 15

Théorie et calcul de probabilités

mines telecom

Soit $a > 0$.Si $n \in \mathbb{N}$, on considère que $p_n = a\dfrac{2^n}{n!}$ est la probabilité qu'une famille ait n-enfants.
On considère que la probabilité qu'un enfant soit une fille ou un garçon est la même.
1) Déterminer a.
2) Quelle est la probabilité que la famille ait au moins un garçon.
3) La famille a exactement un garçon. Quelle est la probabilité que la famille ait 2 enfants.

Chapitre 16

Variables aléatoires

Pour s'échauffer :

1) Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes suivant respectivement la loi géométrique de paramètre p_1 et p_2. Calculer $P\left(X_1 = X_2\right)$ et $P\left(X_1 < X_2\right)$. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$ et de $X_1 - X_2$.
2) On considère le jeu suivant : on considère une pièce dont la probabilité obtenir pile vaut $p \in \left]0, 1\right[$. On lance cette pièce jusqu'à obtenir le premier pile. On note X le nombre de lancers qui ont été nécessaires. On relance alors X fois la pièce et on note N le nombre de piles obtenus lors de cette seconde série de tirages.
Donner la loi de X, de N sachant $(X = k)$ puis de N. Préciser l'espérance et la variance de X et N.
(Espérance et variance seront vues plus tard)

l'exercice de base à savoir faire et rédiger

On fixe un entier $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. On tire p $(1 \leqslant p \leqslant n)$ boules d'une urne contenant n boules numérotés de 1 à n. On note X_1 le plus petit des numéros obtenus et X_p le plus grand des numéros obtenus.

a) On suppose que les tirages se font sans remise. Donner la loi de X_1 et de X_p.En déduire que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.

b) On suppose que les tirages se font avec remise. Déterminer $X_1(\Omega)$ et $X_p(\Omega)$. Calculer $P(X_1 \geqslant k)$ pour $k \in X_1(\Omega)$ et $P(X_p \leqslant k)$ pour $k \in X_p(\Omega)$. En déduire les lois de X_1 et X_p.

(Loi du nombre de succès itérés)

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts ($n \geqslant 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p appartenant à $]0,1[$ et la probabilité de ne pas l'obtenir est q, avec $q = 1 - p$.

a) On note X le nombre de correspondants obtenus lors de ces n appels. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

b) Après ces n recherches, la secrétaire demande une deuxième fois chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenus la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels, et $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.

(a) Déterminer $Z(\Omega)$ ainsi que la valeur de $P_{(X=k)}(Y = h)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $h \in [\![0, n-k]\!]$.

(b) Démontrer $P(Z = s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{s} P((X = k) \cap (Y = s - k))$.

(c) Vérifier que $\dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{s-k} = \dbinom{n}{s}\dbinom{s}{k}$. En déduire que $P(Z = s) = \dbinom{n}{s}[1-q^2]^s (q^2)^{n-s}$. Reconnaitre la loi de Z.

(File d'attente)

Un péage comporte m guichets numérotés de 1 à m. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de voitures arrivant au péage en 1 heure. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et que ces choix sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet $n^\circ 1$.

a) Calculer $P_{(N=n)}(X = k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$ et justifier que $P(X = k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X = k)\, P(N = n)$.

b) En déduire la loi de X (on retrouvera une loi usuelle) ainsi que son espérance et sa variance.

Des urnes

1) On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules numérotées $3, 4, 5$ et 6. On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n échanges successifs.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \{0, .., 6\}, \quad P(X_{n+1} = k) = \dfrac{7-k}{6} P(X_n = k-1) + \dfrac{k+1}{6} P(X_n = k+1)$.

b) On pose $U_n = (P(X_n = k))_{0 \leqslant k \leqslant 6}$. Expliciter la matrice $A \in \mathfrak{M}_7(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = AU_n$.

c) A l'aide de la calculatrice, montrer que A est diagonalisable. Montrer que $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et préciser leurs limites respectives. Interprétation ?

d) On note $V = (k)_{0 \leqslant k \leqslant 6} \in \mathfrak{M}_{7,1}(\mathbb{R})$ et $W = (1)_{0 \leqslant k \leqslant 6}$ Vérifier que $VA = \dfrac{2}{3} V + W$ et que $VU_n = E(X_n)$.

e) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(X_{n+1}) = \dfrac{2}{3} E(X_n) + 1$ puis calculer la valeur de $E(X_n)$ ainsi que $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n)$.

2) Une urne contient des boules numérotées de 1 à m. A chaque tirage, on pioche au hasard et avec remise une boule dans l'urne. On note Y_m la variable aléatoire égale au rang du premier lancer (autre que le premier) pour lequel le numéro obtenu est supérieur ou égal au numéro obtenu lors du premier lancer.

Etablir que $\forall n \geqslant 2, \quad P(Y_m = n) = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{i}{m}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{m}\right)$. En déduire l'existence et la valeur de $E(Y_m)$.

mines telecom

Soient X, Y deux variables alátoires indépendantes suivant
la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = \text{Min}(X,Y)$ et $V = \text{Max}(X,Y)$.
1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner $P\big(X \leq n\big)$ et $P\big(X \geq n\big)$.
2) Donner $P\big(U = n\big)$ et $P\big(V = n\big)$.
3) Que peut-on dire des événememnts
$\big(X = n\big) \bigcap \big(Y = n\big)$ et $\big(U = n\big) \bigcap \big(V = n\big)$? Les variables aléatoires sont-elles indépedantes ?

Mines telecom

On considère n urnes numérotées par un indice j de 1 à n, et contenant j boules numérotées de 1 à j. On tire successivement et avec remise une boule : si on obtient au k-ième tirage une boule numérotée i alors le $(k+1)$ ième tirage sera effectué dans l'urne i.
On note $X_k = i$ l'événement *on tire une boule numérotée i au k-ième tirage.*
• Exprimer $P\big(X_{k+1} = i\big)$ en fonction de $P\big(X_k = j\big)$ pour $j = 1$ à n.
• On pose $W_k = \begin{pmatrix} P\big(X_k = 1\big) \\ P\big(X_k = 2\big) \\ \vdots \\ P\big(X_k = n\big) \end{pmatrix}$.
Déterminer la matrice A telle que $W_{k+1} = AW_k$. En étudiant cette matrice montrer que $\Big(W_k\Big)_k$ converge.

mines telecom

Soient X ,Y des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}+_*$.
1) Déterminer la fonction génératrice de X et de $3Y$.
2) En déduire la fonction génératrice de $Z = X + 3Y$.
3) En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$
4) X et Z sont elles indépendantes ?
4) Déterminer le minimun de la fonction $t \mapsto V(X + tY)$.

mines telecom

On considère un dé à six faces équilibré.
1) Dans cette première expérience, on effectue 10 lancers indépendants. Soit T la variable aléatoire qui donne le premier lancer où l'on obtient un 6 (si l'on obtient pas un 6 on dira que $T = 0$). Déterminer la loi de T.
Dans les questions suivantes, on ne limite plus le nombre de lancers de dé.
Notons T_n la variable aléatoire renvoyant le numéro du lancer où on obtient le n-ième 6.
2a) Déterminer la loi de T_1
Déterminer la fonction génératrice de T_1, on précisera sa somme et son rayon de convergence.
2b) Déterminer la loi de $T_2 - T_1$.
Déterminer la fonction génératrice de $T_2 - T_1$, on précisera sa somme et son rayon de convergence.
En déduire la loi de T_2.

mines telecom

1) Donner la définition d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
2) Que vaut $E(X)$ pour un telle loi ainsi que $V(X)$?
3) Soient X et Y deux lois de Poisson indépendantes qui suivent une loi de poisson de paramètre λ et μ. Expliciter la loi de $X + Y$.

mines telecom

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p.
On pose $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$.
1) Montrer que A est inversible.
2) Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable.

mines telecom

On suppose que X suit la loi binomiale de paramètre n et p.
Montrer que

$$\mathbb{P}\Big(\frac{X}{n} - p \geq \epsilon\Big) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}.$$

Probabilités

On lance une piéce de monnaie ayant une probabilité p de faire *pile* . On note N la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un pile.
1) Donner la loi de N, son espérance et sa variance.
Si il a fallu N lancers pour obtenir *pile* on relance N fois la piéce et on compte le nombre de fois où l'on a obtenu pile dans cette deuxième partie de l'expérience.
2) Déterminer la loi de X ainsi que son espérance.

Probabilités

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour t réel convenable, on pose :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$

a) Montrer que la fonction G_X est définie et continue sur $[-1, 1]$.
b) Justifier que la fonction G_X est croissante et convexe sur $[0, 1]$.

mines telecom

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p et Y suivant la loi géométrique de paramètre q. Les lois sont indépendnates.
1) Sans calcul, pour $n \in \mathbb{N}$, donner $P(X > n)$ (on utilisera l'expérience type associée à une loi géométrique).
2) Soit $Z = Min(X, Y)$, déterminer la loi et l'espérance de Z.

mines telecom

Soient $(a,b) \in]0,1[\times \mathbb{R}_+^*$, et X , Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} P(X=i, Y=j) = 0 & \text{si} \quad i<j \\ P(X=i, Y=j) = \dfrac{\mathrm{e}^{-b} b^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer les lois de X et Y, ainsi que $E(x)$ et $E(Y)$ les lois sont elles indépendantes.

mines telecom

Soient $(a,b) \in]0,1[\times \mathbb{R}_+^*$, et X , Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} P(X=i, Y=j) = 0 & \text{si} \quad i<j \\ P(X=i, Y=j) = \dfrac{\mathrm{e}^{-b} b^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer les lois de X et Y, ainsi que $E(x)$ et $E(Y)$ les lois sont elles indépendantes.

Enfin des exercices un peu plus difficiles mais avec les corrigés un peu plus tard.

\AM@currentdocname .pdf

.pdf

\AM@currentdocname .pdf

.pdf

\AM@currentdocname .pdf

.pdf

\AM@currentdocname .pdf

.pdf

\AM@currentdocname .pdf

.pdf

\AM@currentdocname .pdf

.pdf

16.1

On peut refaire un exercice déjà vu mais avec le cours sur les familles sommables

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières. Montrer que X admet une espérance si et seulement si $\sum_{n\geq} P(X \geq n)$ est convergente. Montrer qu'en cas d'existence

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k).$$

On pourra introduire :

$$U_{i,j} = P(X = j) \text{ si } i \leq j \quad 0 \quad \text{ sinon.}$$

16.2

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi d'une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit aussi N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes des précédentes. On étudie $S = X_1 + \cdots + X_N$.

a) Justifier que S est une variable aléatoire à valeurs naturelles.

b) Établir $G_S(t) = G_N\big(G_X(t)\big)$ pour tout t de $[-1\,;1]$.

c) On suppose que les variables N et X admettent chacune une espérance finie. Établir l'*identité de Wald* : $\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(N)\mathrm{E}(X)$.

16.3 Galton Watson épisode 2

On considère une famille $(X_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ de variables aléatoires de même loi X indépendantes et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires définies par récurrence par

$$Z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_{j,n+1}.$$

On définit $p_n = P(X = n)$ et $m = E(X)$ que l'on suppose finie.

Concrètement $(Z_n)_{n\in N}$ modélise l'évolution d'une population dont, à chaque instant n, les individus meurent en donnant naissance (de manière indépendante) à des nombres d'enfants suivant la loi X. On suppose que X admet une espérance finie m.

On note G_X la fonction génératrice de X, on suppose que $P(X = 1) + P(X = 0) < 1$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $i > 0$, la variable Z_n est indépendante de $X_{i,n}$.
On veut calculer $P(\exists n \in N, Z_n = 0)$. On note

$$\pi_n = P(Z_n = 0) \text{ et } \pi_\infty = P(\exists n \in N, Z_n = 0)$$

π_∞ représente la probabilité d'extinction.

b) Montrer que $\pi_\infty = \lim_{n\to+\infty} \pi_n$.

c) Montrer que si $p_0 = 1$ alors $\pi_{infty} = 0$ et interpréter ce résultat.

d) Si $p_0 = 1$ montrer que $\pi_{infty} = 1$ er interpréter ce résultat.
On suppose désormais $p_0 \in]0, 1[$.

e) (a) $G_n(0) = \pi_n$ (et oui).

(b) Montrer que G_X est strictement croissante sur $]0{,}1[$, dérivable sur $[0, 1]$.

(c) G est convexe sur $]0,1[$.

(d) G est strictement convexe sur $]0,1[$ ssi $p_0 + p_1 < 1$

(e) Montrer que $E(X) = 1$ ssi $p_0 + p_1 = 1$. Pour cela on remarquera et on démontrera que :

$$E(X) = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1) p_k$$

(strictement convexe c'est la $G" > 0$.)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note G_{Z_n} la fonction génératrice de Z_n (définie sur $[0,1]$). Montrer que $G_{Z_{n+1}} = G_{Z_n} \circ G_X$. En déduire $E(Z_n)$.

f) Montrer que π_∞ est le plus petit point fixe de G_X sur $[0,1]$ (point fixe c'est $f(a) = a$.)

g) Montrer que si $m \leq 1$ alors $\pi_\infty = 1$ et si $m > 1$ alors π_∞ est l'unique point fixe de G sur $]0,1[$. Faire des dessins.

16.4

a) Écrire une fonction `S(n,p)` qui simule une variable aléatoire $S_n = Y/n$, où Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

En déduire une fonction `test(n,p)` qui affiche les courbes interpolant les points (k, S_k), puis

$$\left(k, p - \sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right) \text{ et } \left(k, p + \sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right).$$

Que remarque-t-on ?

b) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1\,;1]$. Montrer que

$$\mathrm{e}^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)\mathrm{e}^{t}.$$

c) On considère une variable aléatoire X telle que $|X| \leq 1$ et $\mathrm{E}(X) = 0$. Montrer que $\exp(tX)$ est d'espérance finie et

$$\mathrm{E}\big(\exp(tX)\big) \leq \operatorname{ch} t \leq \exp(t^2/2).$$

d) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes telles que, pour tout i, $|X_i| \leq a_i$. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Montrer

$$\mathrm{E}\big(\exp(tS)\big) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Montrer

$$\mathrm{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right).$$

e) En choisissant une bonne valeur de t, montrer

$$\mathrm{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right).$$

f) Commenter le résultat observé à la première question.

16.5

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes réelles discrètes, de même loi, d'espérance nulle et prenant un nombre fini de valeurs. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

a) Fixons un réel $\epsilon > 0$. Posons

$$h^+(\epsilon) = \sup\{\epsilon t - \ln(E(e^{tX_1}), t \in \mathbb{R}^+\}$$

Remarque du gentil examinateur : c'est la première question donc elle ne doit pas être difficile , considérer $t \mapsto t - \ln(E(e^{tX_1})$ en dérivant sans trop justifier (l'hypothèse X prend un nombre fini de valeurs simplifie les choses). Puis faire un dessin de la situation.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(\dfrac{S_n}{n} \geq \epsilon) \leq \exp(-nh^+(\epsilon))$.

c) Montrer que pour tout couple (nm) d'entiers naturels non nuls

$$P(S_n \geq n\epsilon)P(X_{n+1} + X_{n+2} + \cdots + X_{n+m} \geq m\epsilon) \leq P(S_{n+m} \geq (n+m)\epsilon).$$

d) On admet le lemme suivant auquel on ne comprend pas grand chose :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $[0,1]$ telle que pour tout couple (p,q) d'entiers strictement positifs

$$u_{p+q}^{p+q} \leq u_p^p u_q^q$$

alors la suite (u_n) converge.
Montrer que la suite $\left(\mathrm{P}(\dfrac{S_n}{n} \geq \epsilon)\right)^{\frac{1}{n}}$ converge vers un réel l tel que

$$l \leq \exp(-h^+(\epsilon)).$$

16.6

On souhaite modéliser le nombre d'arrivées de « clients » dans un « service » durant un laps de temps T.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $s, t \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq s \leq t$, on note $A(n,s,t)$ l'événement

« il arrive n clients dans l'intervalle de temps de $[s\,;t[$ »

On admet l'existence d'un espace probabilisé permettant d'étudier la probabilité de cet événement en supposant :

(H1) pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ et tous réels $0 \leq r \leq s \leq t$, les événements $A(m,r,s)$ et $A(n,s,t)$ sont indépendants ;

(H2) la probabilité de l'événement $A(n,s,t)$ ne dépend que de n et du réel $t-s$. On note

$$p_n(t) = \mathrm{P}\big(A(n,0,t)\big).$$

(H3) la fonction p_0 est continue et $p_0(0) = 1$;

(H4) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) = 1.$$

(H5) on a le développement asymptotique

$$1 - p_0(t) - p_1(t) \underset{t \to 0^+}{=} \mathrm{o}\big(p_1(t)\big).$$

Cette dernière hypothèse signifie que, durant un laps de temps minime, la probabilité d'arrivée d'au moins deux clients est négligeable devant la probabilité d'arrivée d'un seul client.

a) Justifier que la fonction p_0 est décroissante et que

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+, p_0(s+t) = p_0(s)p_0(t).$$

b) Montrer que p_0 est à valeurs strictement positives et qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, p_0(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

c) Justifier

$$p_1(t) \underset{t \to 0^+}{=} \lambda t + \mathrm{o}(t) \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, p_n(t) \underset{t \to 0^+}{=} \mathrm{o}(t).$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer

$$\forall s, t \geq 0, p_n(s+t) = \sum_{k=0}^{n} p_k(s)p_{n-k}(t).$$

En déduire que la fonction p_n est dérivable et

$$\forall t \geq 0, p_n'(t) = \lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t)).$$

e) Obtenir l'expression de $p_n(t)$ (on pourra étudier $q_n(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} p_n(t)$).

f) On note X la variable aléatoire déterminant le nombre de « clients » arrivant durant le laps de temps $T > 0$. Déterminer la loi de X. Comment interpréter le paramètre λ ?