Pour Mardi.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. on s'intéresse à la propriété suivante :

$$(P) \quad u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n} \Longleftrightarrow u_n + u_{n+1} \sim_{+\infty} \frac{2}{n}$$

1. Montrer que l'implication de gauche à droite est toujours vérifiée.
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Montrer que la propriété (P) est réalisée.
3. La propriété (P) est elle vraie pour toute suite ? On pourra considérer

$$u_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

remarque pour la question 2 traiter le cas croissant par exemple, et écrire des encadrements de $2u_n$.

pour mercredi

Partie principale quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{1}{(n+k)^2}$.

1. Montrer par la méthode que vous voulez :

$$\forall x \in [0,1],\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

2. En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{1}{(n+k)^2}$ à l'aide d'autres sommes.
3. En écrivant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$ à l'aide d'une somme de Riemman montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}).$$

Indication : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2} = \frac{1}{n}\left(\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx + o(1)\right)$ au voisinage de $+\infty$

4. Montrer à l'aide d'une majoration grossière :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{6(n+k)^6} \leq \frac{1}{6n^5},$$

5. Conclure que

$$\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{1}{(n+k)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Pour Jeudi

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par $a_0 \in \mathbb{R}^{+\star}$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-a_n}$$

a) Etudier la convergence de la suite (a_n).
b) Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.
c) Déterminer la nature de la série de terme général a_n^2.
d) Déterminer la nature de la série de terme général a_n à l'aide de la série

$$\sum \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

Pour vendredi

I)
La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 \geq 0$ et $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ si $n \geq 1$.
1) Montrer que, pour tout $a \geq 0$, $\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(1+a)$.
2) Prouver que $\sqrt{n} \leq u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$.
3) Démontrer que $u_n \sim \sqrt{n}$.
4) Soit $w_n = u_n - \sqrt{n}$. Établir que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite L à préciser.
II) a) Justifier la convergence de la série numérique

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k}$$

On pose

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

b) Montrer que

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$

c) Déterminer un équivalent de R_n.
d) Donner la nature de la série de terme général R_n.