Pour Mardi

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes, et $f : E \to E$ définie par :

$$\forall P \in E,\ f(P)(X) = \frac{P(-X) - P(X)}{2}.$$

1. Montrer que $f \in L(E)$
2. Montrer que $E = \mathrm{Im} f \bigoplus \mathrm{Ker}(f)$ et $f^2 = -f$.
3. Soit g un endormorphisme qui vérifie $g^2 + g = 0$, montrer que $E = \mathrm{Ker}(g + Id_E) \bigoplus \mathrm{Ker}(g)$

Pour Mercredi

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Pour tout endomorphisme de E, on note $\mathrm{Ker}(u)$ le noyau de u et $\mathrm{Im}(u)$ l'image de u.

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel V de E est stable par u si et seulement si $u(V) \subset V$

1. Soient u, v des endomorphismes de E qui commutent $u \circ v = v \circ u$. Démontrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

   Dans la suite u désigne un endomorphisme qui vérifie $u^2 = 0$.
2. Démontrer que $\mathrm{Im}(u) \subset Ker(u)$
3. En déduire une inégalité sur le rang.
4. On suppose ici que $n = 2$, soit $E = \mathbb{R}^2$. On suppose aussi que u est non nul.
   (a) Démontrer qu'il existe une droite D dans E telle que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u) = D$.
   (b) Soit v un endomorphisme de E tel que $v^2 = 0$ et $u \circ v = v \circ u$.
      i. Démontrer que $v(D) \subset D$.
      ii. Démontrer que $u \circ v = 0$.
   (c) Soient v et w deux endomorphismes de E tels que $v^2 = 0, w^2 = 0, u \circ v = v \circ u$ et $u \circ w = w \circ u$.Démontrer que $v \circ w = 0$
5. On revient au cas général. Soit m un entier naturel ≥ 2. Soient $u_1, \ldots, u_m$ des endomorphismes de E tels que :

   $$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, m\}^2,\ u_i^2 = 0 \text{ et } u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$

   On pose $F_1 = Im(u_1)$ et pour un entier i compris entre 2 et m, $F_i = Im(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_{i-1} \circ u_i)$.
   (a) Démontrer que, pour tout entier i compris entre 1 et $m - 1$, F_i est un sous espace vectoriel stable par u_{i+1}.
   (b) En déduire que, pour tout entier i compris entre 1 et m , F_i est de dimension au plus $\dfrac{n}{2^i}$.
   (c) Dans le cas où $n < 2^m$, démontrer que l'endomorphisme $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_m = 0$.

1 Pour Jeudi

1. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E vérifiant : $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im}\ f$.
   (a) Montrer que nécessairement n est un entier pair et déterminer le rang de f en fonction de n.

   (b) Montrer que, $fof = 0$

2. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $fof = 0$ et $\dim E = 2\ \mathrm{rg}(f)$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}\ f$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Im}\ f$.

3. On suppose $n \geq 1$. Soit f un endomorphisme de E vérifiant
   $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Im} f$, $p = \mathrm{rg} f = \mathrm{Dim}(\ \mathrm{Ker}\ f)$ et $q = n - p$.
   Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$ dans E et soit $(e_1, e_2, .., e_q)$ une base de F.
   (a) Montrer que la famille $(f(e_1), ..., f(e_q))$ est une base de $\mathrm{Im}\ f$.
   (b) Posons, pour tout entier i compris entre 1 et q , $e_{q+i} = f(e_i)$; calculer $f(e_{q+i})$.
   (c) Montrer que la famille $(e_1, e_2, .., e_q, e_{q+1}, .., e_{2q})$ est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.

4. **Application :** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer, en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, une base de $\mathrm{Ker} f$ et une base de $Im(f)$ et sans aucun calcul déterminer A^2.
   (b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire .
   (c) Déterminer les vecteurs d'une telle base $\mathcal{B}'$ en fonction des vecteurs de la base de $\mathcal{B}$

2 Pour vendredi

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant

$$u^3 + u = 0$$

a) Montrer que l'espace $\mathrm{Im} u$ est stable par u.
b) Pour $x \in \mathrm{Im} u$, calculer $u^2(x)$
c) Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im} u$.
Montrer que v est un isomorphisme.
d) En déduire que le rang de l'endomorphisme u est un entier pair.