Pour Mardi

0.1

Soient $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $f : E \to E$ l'application qui transforme une suite $u = (u_n)$ en $v = (v_n)$ définie par

$$v_0 = u_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^\star, v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

0.2

Soit $a \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f : x \mapsto x \mapsto a \wedge x$ où $a \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0_{\mathbb{R}3}\}$. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de f.

0.3

On note $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on pose $g_f : x \mapsto f(0) + \int_0^x f(t)\,dt$. Prouver que l'application $T : f \mapsto g_f$ est un endomorphisme de E. Déterminer ses valeurs propres ainsi qu'une base de chaque espace propre.

Pour Mercredi

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A s'écrit PDP^{-1} où P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et D est une matrice diagonale.
2. On cherche à résoudre l'équation $X^2 = A$. Montrer que si X est solution de cette équation alors $P^{-1}XP$ est diagonale.
3. Résoudre l'équation.

Pour Jeudi

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ $a_{i,j} \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

a) Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(A)$.
b) Justifier que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A alors $|\lambda| \leqslant 1$.

Pour les 5/2 avisés car c'est très délicat.
c) Observer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A et vérifie $|\lambda| = 1$ alors λ est une racine de l'unité.

Pour Vendredi

0.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A n'est pas diagonalisable.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(A - I)^2$.
3. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$
4. Calculer A^n pour n entier naturel donné.