Pour mardi début PROBLEME 1

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'endomorphisme Φ_A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \Phi_A(M) = AM - MA.$$

On note :

- $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$;
- $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des nombres complexes qui sont valeurs propres de la matrice A ;
- $\mathrm{Sp}(\Phi_A)$ l'ensemble des nombres complexes qui sont valeurs propres de l'endomorphisme Φ_A.

PARTIE I : Etude d'un cas particulier.

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A et préciser une base pour chaque espace propre de A.
2. Montrer que T est la matrice de Φ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.
3. Vérifier que T^3 est colinéaire à T. En déduire, sans aucun calcul, que T est diagonalisable.
4. Expliciter les valeurs propres de T.
5. Donner une base de chaque espace propre de T.

PARTIE II : Étude lorsque A est diagonalisable

On suppose dans cette partie que A est diagonalisable. Soient $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale telle que $A = PDP^{-1}$. Pour tout $(i,j) \in \{1, ..., n\}^2$, on note $F_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$.

1.

6. Soit $(i,j) \in \{1, ..., n\}^2$. Expliciter les coefficients des matrices $DE_{i,j}$ et $E_{i,j}D$. Justifier que $E_{i,j}$ est un vecteur propre de Φ_D et que $F_{i,j}$ est un vecteur propre de Φ_A.
7. Établir que $(F_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$
8. Démontrer que Φ_A est diagonalisable et expliciter son spectre $\mathrm{Sp}(\Phi_A)$.

Pour Mercredi PARTIE III : Étude lorsque Φ_A est diagonalisable

On suppose dans cette partie que Φ_A est diagonalisable. Soit $(G_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres pour Φ_A. Pour chaque $(i,j) \in \{1, ..., n\}$, on note $\mu_{i,j}$ la valeur propre associé au vecteur propre $G_{i,j}$.

1.

9. Justifier que A possède au moins une valeur propre λ dans $\mathbb{C}$.

   Dans toute la suite de cette partie, on fixe une valeur propre λ de A et on note X_0 un vecteur propre de A associé à cette valeur propre λ.

10. Prouver que la famille $(G_{i,j}X_0)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une famille génératrice de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

11. Soit $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$. Montrer que $G_{i,j}X_0$ appartient à un espace propre de A et préciser la valeur propre associée.

12. Démontrer que A est diagonalisable.

PARTIE IV : Spectre de Φ_A dans le cas général

On revient désormais au cas général où $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ (pas nécessairement diagonalisable). On note

$$\Gamma = \left\{\lambda - \mu, \quad (\lambda,\mu) \in (\mathrm{Sp}(A))^2\right\}.$$

1.

13. Prouver que $\mathrm{Sp}(A)$ et $\mathrm{Sp}(\Phi_A)$ sont deux ensembles non vide.

14. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Démontrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}\left({}^tA\right)$, où ${}^tA$ est la transposée de la matrice A.

15. Soient λ et μ deux valeurs propres de A (pas nécessairement différentes), $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ et $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre μ. On pose :

$$M_{X,Y} = X\,{}^tY \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

Prouver que $\Phi_A(M_{X,Y}) = (\lambda - \mu)M_{X,Y}$. Expliciter les coefficients de la matrice $M_{X,Y}$. En déduire que $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(\Phi_A)$.

Dans toute la suite de cette partie,

- on fixe α une valeur propre de Φ_A ;
- on désigne par $M_\alpha \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre α ;
- on note χ_A le polynôme caractéristique de A ;
- On note $P(X) = \chi_A(X - \alpha)$.

16. Justifier que $(A - \alpha I_n)M_\alpha = M_\alpha A$ puis que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad (A - \alpha I_n)^k M_\alpha = M_\alpha A^k$.

17. Démontrer que $P(A)M_\alpha = 0_n$.

18. Prouver que $P(A)$ n'est pas une matrice inversible.

19. Justifier que $\chi_A(X) = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$ où m_λ est la multiplicité de λ comme racine de χ_A.

20. En déduire que $\Gamma = \mathrm{Sp}(\Phi_A)$.

Pour Jeudi PROBLEME 2

On note :

- $E = C^0([0,\pi],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,\pi]$ à valeurs réelles ;
- $F = \left\{h \in C^2([0,\pi],\mathbb{R}) \quad / \quad h(0) = h'(\pi) = 0)\right\}$.

Pour toute fonction f appartenant à E, on note $H(f)$ la fonction définie sur $[0,\pi]$ par :

$$\forall x \in [0,\pi], \quad H(f)(x) = \int_0^\pi \min(x,t)f(t)dt$$

où $\min(x,t)$ désigne le plus petit des deux nombres x et t.

PARTIE I : Étude de H

1. Soit $f \in E$. Justifier que : $\forall x \in [0,\pi]$, $\quad H(f)(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)dt - x\int_\pi^x f(t)dt.$

   En déduire que $H(f)$ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$ et expliciter sa dérivée.

2. Prouver que H est un endomorphisme de E.

3. Soit $f \in E$. Démontrer que $H(f) \in F$ et que $(H(f))'' = -f$.

4. Soit $f \in F$. Montrer que $f = H(-f'')$.

5. Établir que $\ker(H) = \{0_E\}$ et que $\mathrm{Im}(H) = F$.

6. Démontrer que H est un isomorphisme de H sur F et expliciter sa réciproque.

Pour Vendredi PARTIE II : Résolution d'une équation différentielle

On note $G = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et on note $D : f \in G \mapsto f'$.

1.

7. Prouver que D est un endomorphisme de G.

8. Soit $\omega \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $\ker\left(D^2 - \omega^2\,\mathrm{Id}_G\right) = \ker(D - \omega\,\mathrm{Id}_G) \oplus \ker(D + \omega\,\mathrm{Id}_G)$.

9. Soit $\omega \in \mathbb{C}^*$. Expliciter une base de $\ker(D - \omega\,\mathrm{Id}_G)$ et une base de $\ker(D + \omega\,\mathrm{Id}_G)$.

10. Soit $\omega \in \mathbb{C}^*$, une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $y'' - \omega^2 y = 0$.

    Prouver que $y \in G$ puis, uniquement à l'aide des questions précédentes, justifier l'existence de $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $y : x \mapsto \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}$.

PARTIE III : Étude spectrale de H

On note $\mathrm{Sp}(H)$ l'ensemble des valeurs propres de H. Soit λ une valeur propre de H et f un vecteur propre de H associé à la valeur propre λ.

1.

11. Démontrer que $\lambda \neq 0$.

12. Justifier que f est de classe C^2 sur $[0,\pi]$ et vérifie l'équation différentielle

$$(\mathcal{S}_\lambda) : \begin{cases} y'' + \dfrac{1}{\lambda}y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

13. On suppose que $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$. Expliciter $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\dfrac{1}{\lambda} = -\omega^2$ et prouver que toute solution de $(\mathcal{S}_\lambda)$ est nulle.

14. On suppose que $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

    Expliciter $\omega \in \mathbb{C}^*$ de partie imaginaire strictement positive tel que $\dfrac{1}{\lambda} = -\omega^2$.

    Prouver que $(\mathcal{S}_\lambda)$ possède une solution non nulle si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\omega = \dfrac{2k+1}{2}i$, où i est le complexe vérifiant $i^2 = -1$ et de partie imaginaire strictement positive.

15. Déterminer l'ensemble $\mathrm{Sp}(H)$ des valeurs propres de H puis, pour chaque valeur propre λ de H, préciser une base de l'espace propre $E_\lambda(H)$ de H associé à la valeur propre λ.

16. Sans aucun calcul, justifier que la famille de fonctions $\left(x \mapsto \sin\left(\dfrac{2k+1}{2}x\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.