Exercice

1) Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$.

Soit $x \in \ker(u)$. $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$ donc $v(x) \in \ker(u)$. $\ker(u)$ est stable par v. Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Soit $y \in E$ tel que $x = u(y)$.$v(x) = v(u(y)) = u(v(y))$ donc $v(x) \in \mathrm{Im}(u)$. $\mathrm{Im}(u)$ est stable par v.

2) Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Soit $y \in E$ tel que $x = u(y)$.$u(x) = u^2(y) = 0$ donc $x \in \ker(u)$.
Finalement
$\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$.
3) On en déduit que $\mathrm{rg}(u) \leq \dim(\ker(u)$.
Par le théorème du rang, on obtient $\mathrm{rg}(u) \leq \frac{n}{2}$.

4° a)Si $n = 2$ et $u \neq 0$, (3) conduit à $\mathrm{rg}(u) = 1 = \dim(\ker(u))$.
Alors $D = \ker(u) = \mathrm{Im}(u)$ est une droite

b) (i) Soit v telle que $u \circ v = v \circ u$ et $v^2 = 0$. Par (1) on sait que $D = \mathrm{Im}(u)$ est stable par v.
(ii) D est donc propre pour v. Or $\mathrm{sp}(v) = \{0\}$.

Donc $v = 0$ ou $D = \ker(v) = \mathrm{Im}(v)$. Dans les deux cas $u \circ v = 0$.

c) De même, on a $w = 0$ ou $D = \ker(w) = \mathrm{Im}(w)$. Dans les deux cas $v \circ w = 0$.

5) a)Posons, pour $1 \leq i \leq m-1, v = u_1 \circ \cdots \circ u_i$.$v$ et u_{i+1} commutent, donc par (1), F_i est stable par u_{i+1}.

b) On effectue une récurrence sur i : $(H_i) \dim(F_i) \leq \frac{n}{2^i}$ (H_1) est obtenu par (3). Supposons (H_{i_0}) pour $i_0 \geq 1$. Soit $\tilde{u}_{i_0+1}$ le morphisme induit par u_{i_0+1} sur $F_{i_0} \cdot \tilde{u}_{i_0+1}^2 = 0$. En appliquant l'hypothèse de récurrence et le résultat du (3), on déduit $\mathrm{rg}(\tilde{u}_{i_0+1}) \leq \frac{n}{2^{i_0+1}}$. Or $\mathrm{Im}(\tilde{u}_{i_0+1}) = F_{i_0+1}$ car les (u_i) commutent. D'où (H_{i_0+1}). Ceci achève la récurrence.
c) Si $n < 2^m$, $\dim F_m < 1$ donc $\dim F_m = 0$. Ainsi $u_1 \circ \cdots \circ u_m = 0$.