PROBLEME 1

Mardi PARTIE I : Etude d'un cas particulier.

1. $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 - 1^2 = X(X-2)$ donc $\operatorname{Sp}(A) = \{0, 2\}$ et $E_0(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $E_2(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\Phi_A(M) = \begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned}
\Phi(E_{1,1}) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -E_{1,2} + E_{2,1}, \quad \Phi(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -E_{1,1} + E_{2,2}, \\
\Phi(E_{2,1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = E_{1,1} - E_{2,2}, \quad \Phi(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2} - E_{2,1}
\end{aligned}$$

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \Phi_A(E_{1,1}) & \Phi_A(E_{1,2}) & \Phi_A(E_{2,1}) & \Phi_A(E_{2,2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ E_{1,1} \\ E_{1,2} \\ E_{2,1} \\ E_{2,2} \end{array}$$

3. Un calcul direct donne $T^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 4T$ donc le polynôme $X^3 - 4X = X(X-2)(X+2)$ annule T. Comme ce polynôme est scindé à racines simples, on en déduit que T est diagonalisable..

4. Comme le polynôme $X(X-2)(X+2)$ annule T donc $\operatorname{Sp}(T) \subset \{\text{racines de } X(X-2)(X+2)\} = \{-2, 0, 2\}$. La matrice $T - 0I_4 = T$ n'est pas inversible ($C_1 + C_4 = 0$, $C_2 + C_3 = 0$) donc $0 \in \operatorname{Sp}(T)$. La matrice $T - 2I_4 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible ($C_1 - C_2 + C_3 - C_4 = 0$) donc $2 \in \operatorname{Sp}(T)$. La matrice $T + 2I_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible ($C_1 + C_2 - C_3 - C_4 = 0$) donc $-2 \in \operatorname{Sp}(T)$. Par conséquent, $\operatorname{Sp}(T) = \{-2, 0, 2\}$.

5. D'après la question précédente, on a : $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\ker(T) = E_0(T)$ et forment une famille libre (car ils sont non nuls et non colinéaires) donc $\dim(E_0(T)) \geqslant 2$. En outre, $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient à $\ker(T - 2I_4) = E_2(T)$ donc $\dim(E_2(T)) \geqslant 1$ et $\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient à $\ker(T + 2I_4) = E_{-2}(T)$ donc $\dim(E_{-2}(T)) \geqslant 1$. Comme $\dim(E_0(T)) +$

$\dim(E_2(T)) + \dim(E_{-2}(T)) = 4$ (car $T \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$ est diagonalisable) donc $\dim(E_0(T)) = 2$, $\dim(E_2(T)) = \dim(E_{-2}(T)) = 1$ ce qui entraine que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $E_0(T)$, ε_3 est une base de $E_2(T)$ et ε_4 est une base de $E_{-2}(T)$.

PARTIE II : Étude lorsque A est diagonalisable

6. On suppose que $D = \operatorname{diag}(d_1, ..., d_n)$. Un calcul direct montre que $DE_{i,j} = d_i E_{i,j}$ et $E_{i,j}D = d_j E_{ij}$ donc $\Phi_D(E_{i,j}) = DE_{i,j} - E_{i,j}D = (d_i - d_j)E_{i,j}$. Comme $E_{i,j} \neq 0_n$, on en déduit que $E_{i,j}$ est un vecteur propre de Φ_D.
   Comme P est inversible et que $E_{i,j} \neq 0_n$, on en déduit que $F_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1} \neq 0_n$ et
   $$\begin{aligned}\Phi_A(F_{i,j}) &= AF_{i,j} - F_{i,j}A = \left(PDP^{-1}\right)\left(PE_{i,j}P^{-1}\right) - \left(PE_{i,j}P^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) \\ &= P(DE_{i,j} - E_{i,j}D)P^{-1} = P(d_i - d_j)E_{i,j}P^{-1} = (d_i - d_j)F_{i,j}\end{aligned}$$
   donc $F_{i,j}$ est un vecteur propre de Φ_A.

7. L'application $f : M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ (car c'est clairement un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie et
   $$M \in \ker(f) \Leftrightarrow PMP^{-1} = 0_n \Leftrightarrow M = P^{-1}0_nP = 0_n$$
   (car P est inversible) c'est-à-dire $\ker(f) = \{0_n\}$). Comme $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on en déduit que $(f(E_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (F_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $f(\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})) = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
   On peut aussi dire que la famille $(F_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est de cardinal $n^2 = \dim(\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))$ et la famille $(F_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est libre (en effet si
   $\displaystyle\sum_{i,j} \alpha_{ij}F_{i,j} = 0_n$ alors $\displaystyle P\left(\sum_{i,j}\alpha_{i,j}E_{i,j}\right)P^{-1} = 0_n$ alors $\displaystyle\sum_{i,j}\alpha_{i,j}E_{i,j} = 0_n$ alors $\forall (i,j),\quad \alpha_{i,j} = 0$
   car la famille $(E_{i,j})_{i,j}$ est libre).

8. La famille $(F_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de Φ_A donc Φ_A est diagonalisable (car sa matrice dans la base $(F_{i,j})_{i,j}$ est diagonale) et
   $$\operatorname{Sp}(\Phi_A) = \left\{d_i - d_j,\quad (i,j) \in \{1, ..., n\}^2\right\} = \left\{\lambda - \mu,\quad (\lambda, \mu) \in (\operatorname{Sp}(A))^2\right\}$$
   (car les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A).

Mercredi PARTIE III : Étude lorsque Φ_A est diagonalisable

9. $\chi_A \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg(\chi_A) = n \geqslant 1$ donc, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, χ_A possède au moins une racine $z \in \mathbb{C}$. Comme toute racine de χ_A est valeur propre de A, on en déduit que z est valeur propre de A.

10. Soit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Comme $X_0 \neq 0_{n,1}$ (car X_0 est un vecteur propre), on le complète en une base $(X_0, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et on considère u l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ défini par $u(X_0) = X$ et $\forall i \in \{2, ..., n\}$, $u(\varepsilon_i) = 0_{n,1}$. Soit U la matrice (dans la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) de u alors $PX_0 = X$. Comme $(G_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $(\alpha_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbb{C}^{n^2}$ tel que

$$P = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_{i,j} G_{i,j} \text{ donc } X = PX_0 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \alpha_{i,j} G_{i,j} X_0 \in \text{Vect}\left(G_{i,j}X_0, \quad (i,j) \in \{1, .., n\}^2\right)$$

ce qui prouve que la famille $(G_{i,j}X_0)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est génératrice de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

11. On a

$$\begin{aligned} \Phi_A(G_{i,j}) &= \mu_{i,j} G_{i,j} \text{ donc } AG_{i,j} - G_{i,j}A = \mu_{i,j}G_{i,j} \text{ donc} \\ AG_{i,j}X_0 - G_{i,j}AX_0 &= \mu_{i,j}G_{i,j}X_0 \text{ donc } AG_{i,j}X_0 - G_{i,j}(\lambda X_0) = \mu_{i,j}G_{i,j}X_0 \\ & AG_{i,j}X_0 = \left(\lambda + \mu_{i,j}\right) G_{i,j}X_0 \text{ finalement } G_{i,j}X_0 \in E_{\lambda + \mu_{i,j}}(A). \end{aligned}$$

12. D'après le théorème de la base extraite, on peut extraire de la famille génératrice $(G_{i,j}X_0)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une sous-famille $(G_{i,j}X_0)_{(i,j) \in S}$ qui soit une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Chacun des vecteurs de cette sous-famille est non nul (car élément d'une base) et appartient à un espace propre de A donc chacun de ces vecteurs est un vecteur propre de A. Par conséquent, il existe une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ formé de vecteurs propres de A donc A est diagonalisable.

PARTIE IV : Spectre de Φ_A dans le cas général

13. Il suffit d'appliquer l'argumentaire de la question III.1 à A et Φ_A.

14. Comme $\chi_A = \chi_{{}^tA}$ (d'après le cours), on a $\text{Sp}(A) = \{\text{racines de } \chi_A = \chi_{{}^tA}\} = \text{Sp}\left({}^tA\right)$.

15. Par définition, on a $AX = \lambda X$ et ${}^tAY = \mu Y \Rightarrow {}^t\left({}^tAY\right) = {}^t(\mu Y) \Leftrightarrow {}^tYA = \mu{}^tY$ donc

$$\Phi_A(M_{X,Y}) = (AX)^tY - X\left({}^tYA\right) = (\lambda X)^tY - X\left(\mu{}^tY\right) = (\lambda - \mu)X^tY = (\lambda - \mu)M_{X,Y}.$$

Si on pose $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $Y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ alors $M_{X,Y} = X^tY = (x_iy_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \neq 0_n$. En effet, comme X (resp. Y) est un vecteur propre, on a $X \neq 0_{n,1}$ (resp. $Y \neq 0_{n,1}$) donc il existe $i_0 \in \{1, ..., n\}$ (resp. $j_0 \in \{1, ..., n\}$) tel que $x_{i_0} \neq 0$ (resp. $y_{j_0} \neq 0$) donc $x_{i_0}y_{j_0} \neq 0$. Par conséquent, $M_{X,Y}$ est un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre $\lambda - \mu$ donc

$$\forall (\lambda, \mu) \in (\text{Sp}(A))^2, \quad \lambda - \mu \in \text{Sp}(\Phi_A) \Leftrightarrow \Gamma \subset \text{Sp}(\Phi_A).$$

16. Par définition, on a

$\Phi_A(M_\alpha) = \alpha M_\alpha \quad , AM_\alpha - M_\alpha A = \alpha M_\alpha$

$AM_\alpha - \alpha M_\alpha = M_\alpha A \quad , (A - \alpha I_n) M_\alpha = M_\alpha A$

Prouvons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la propriété $(\mathcal{H}_k)$: " $(A - \alpha I_n)^k M_\alpha = M_\alpha A^k$ ".
Initialisation $k = 0$ alors $(A - \alpha I_n)^0 M_\alpha = I_n M_a = M_\alpha I_n = M_\alpha A^0$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $(\mathcal{H}_k)$ vraie alors

$$(A - \alpha I_n)^{k+1} M_\alpha = (A - \alpha I_n)^k (A - \alpha I_n) M_\alpha = (A - \alpha I_n)^k M_\alpha A \underset{(\mathcal{H}_k)}{=} \left(M_\alpha A^k\right) A = M_\alpha A^{k+1}$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{k+1})$ et achève la récurrence.

17. Comme $\chi_A \in \mathbb{C}_n[X]$, il existe $(p_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \sum_{k=0}^{n} p_k X^k \text{ donc } P(X) = \chi_A(X-\alpha) = \sum_{k=0}^{n} p_k (X-\alpha)^k \text{ donc} \\
P(A) M_\alpha &= \sum_{k=0}^{n} p_k (A-\alpha I_n)^k M_\alpha = \sum_{k=0}^{n} p_k M_\alpha A^k = M_\alpha \sum_{k=0}^{n} p_k A^k = M_\alpha \chi_A(A) = M_\alpha 0_n = 0_n
\end{aligned}$$

(car le théorème de Cayley-Hamilton).

18. On procède par l'absurde en suppose que $P(A)$ est une matrice inversible. Comme $P(A) M_\alpha = 0_n$, on peut simplifier par un élément inversible donc $M_\alpha = 0$ ce qui n'est pas possible pour un vecteur propre. Par conséquent, $P(A)$ n'est pas une matrice inversible.

19. Le polynôme χ_A appartient à $\mathbb{C}[X]$ et il est de degré n donc il est scindé (d'après le théorème de d'Alembert-Gauss). On note S l'ensemble de ces racines et pour toute racine z de χ_A, on note m_z sa multiplicité. Comme χ_A est unitaire, on a :

$$\chi_A = \prod_{z\in S} (X-z)^{m_z} = \prod_{z\in \mathrm{Sp}(A)} (X-z)^{m_z}$$

car les racines de χ_A sont exactement les valeurs propres de A.

20. En combinant les deux questions précédentes, on a :

$$\begin{aligned}
P(X) &= \chi_A(X-\alpha) = \prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} (X-\alpha-\lambda)^{m_\lambda} \Rightarrow \\
0 &= \det(P(A)) = \det\left(\prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} (A-(\alpha+\lambda) I_n)^{m_\lambda}\right) = \prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} (\det(A-(\alpha+\lambda) I_n))^{m_\lambda} \Rightarrow \\
\exists \lambda &\in \mathrm{Sp}(A), \quad \det(A-(\alpha+\lambda) I_n) = 0 \text{ c'est à dire } \exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \quad \alpha+\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \\
& \exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \quad \exists \mu \in \mathrm{Sp}(A), \quad \alpha+\lambda = \mu \quad , \quad \alpha = \mu - \lambda \in \Gamma
\end{aligned}$$

Ainsi, tout élément α de $\mathrm{Sp}(\Phi_A)$ appartient à Γ donc $\mathrm{Sp}(\Phi_A) \subset \Gamma$ et la question IV.3 fournit l'égalité souhaitée.

PROBLEME 2

Jeudi PARTIE I : Étude de H

1. Soit $x \in [0,\pi]$. En utilisant la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned} H(f)(x) &= \int_0^x \underbrace{\min(x,t)}_{=t \text{ car } t \leqslant x} f(t)\,dt + \int_x^\pi \underbrace{\min(x,t)}_{=x \text{ car } t \geqslant x} f(t)\,dt = \int_0^x t f(t)\,dt + \int_x^\pi x f(t)\,dt \\ &= \underbrace{\int_0^x t f(t) dt}_{=G(x)} - x \underbrace{\int_\pi^x f(t) dt}_{=F(x)}. \end{aligned}$$

Comme les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto t f(t)$ sont continues sur $[0,\pi]$, les fonctions F et G sont dérivables sur $[0,\pi]$ (car il s'agit des primitives de ces fonctions). La fonction $x \mapsto x$ l'est aussi donc la fonction $H(f)$ l'est aussi (comme somme et produit de telles fonctions) et sa dérivée est donnée par :

$$(H(f))' : x \mapsto G'(x) - F(x) + xF'(x) = xf(x) - F(x) + xf(x) = -F(x) = -\int_0^x f(t)\,dt.$$

La fonction F étant dérivable sur $[0,\pi]$, elle y est continue donc $(H(f))'$ est continue sur $[0,\pi]$ d'où $H(f)$ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

2. Soient $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} H(\lambda f + \mu g) &: x \mapsto \int_0^\pi \min(x,t)(\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \int_0^\pi \lambda \min(x,t) f(t) + \mu \min(x,t) g(t)\,dt \\ &= \lambda H(f)(x) + \mu H(g)(x) \Rightarrow H(\lambda f + \mu g) = \lambda H(f) + \mu H(g) \end{aligned}$$

donc H est linéaire. Si $f \in E$ alors f est continue sur $[0,\pi]$ donc, d'après la question précédente, $H(f)$ est de classe C^1 donc continue sur $[0,\pi]$ ce qui entraine que $H(f) \in E$ d'où H est un endomorphisme de E.

3. En conservant les notations de la question 1, la fonction $H(f)$ est dérivable sur $[0,\pi]$ et $(H(f))' = -F$ qui est dérivable sur $[0,\pi]$ et $(H(f))'' = -f$ qui est continue sur $[0,\pi]$. Ainsi, $H(f)$ est de classe C^2 sur $[0,\pi]$ et

$$H(f)(0) = G(0) - 0F(0) = G(0) = 0, \quad (H(f))'(\pi) = -F(\pi) = 0$$

donc $H(f) \in F$ et que $(H(f))'' = -f$.

4. Soit $x \in [0,\pi]$. On procède par intégration par parties.

$$\begin{aligned} H(-f'') &= -\int_0^x t f''(t)\,dt + x\int_\pi^x f''(t)\,dt = -\left([t f'(t)]_0^x - \int_0^x f'(t)\,dt \right) + x\,[f'(t)]_\pi^x \\ &= -\left(x f'(x) - [f(t)]_0^x \right) + x\left(f'(x) - f'(\pi)\right) = f(x) \end{aligned}$$

car $f(0) = f'(\pi) = 0$ puisque $f \in F$.

5. Soit $f \in \ker(H)$ alors

$$H(f) = 0 \Rightarrow (H(f))'' = 0 \Leftrightarrow -f = 0 \Leftrightarrow f = 0 \Rightarrow \ker(H) = \{0_E\}.$$

Soit $f \in \operatorname{Im}(H)$ alors il existe $g \in E$ tel que $f = H(g)$. Comme $H(g) \in F$ (question I.3), on a $f \in F$ donc $\operatorname{Im}(H) \subset F$. Si $f \in F$ alors, d'après la question précédente, on a $f = H(-f'') \in \operatorname{Im}(f)$ donc $F \subset \operatorname{Im}(H)$ d'où l'égalité $F = \operatorname{Im}(H)$.

6. Comme $\ker(H) = \{0\}$, on en déduit que H est injective sur E donc H est un isomorphisme de E sur $\operatorname{Im}(H) = F$ et $F^{-1} : f \in F \mapsto -f''$. En effet, si on note $K : f \in F \mapsto -f'' \in E$ alors

$$\begin{aligned}\forall f &\in F, \quad (H \circ K)(f) = H(-f'') \underset{\text{q4}}{=} f \Rightarrow H \circ K = \underset{F}{\mathrm{Id}} \\ \forall f &\in E, \quad (K \circ H)(f) = -(H(f))'' = -(-f) = f \Rightarrow K \circ H = \underset{E}{\mathrm{Id}}.\end{aligned}$$

vendredi PARTIE II : Résolution d'une équation différentielle

7. Si $f \in G = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ alors $f' \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = G$ et D est clairement linéaire donc D est un endomorphisme de G.

8. Les polynômes $X - \omega$ et $X + \omega$ sont premiers entre eux (scindés et sans racine commune car $\omega \neq -\omega$ puisque $\omega \neq 0$) donc, d'après le lemme des noyaux, on a :

$$\ker((X-\omega)(X+\omega)(D)) = \ker((X-\omega)(D)) \oplus \ker((X+\omega)(D)) \Leftrightarrow \ker\left(D^2 - \omega^2 \underset{G}{\mathrm{Id}}\right) = \ker\left(D - \omega \underset{G}{\mathrm{Id}}\right) \oplus$$

9.

$$\begin{aligned}f &\in \ker\left(D - \omega \underset{G}{\mathrm{Id}}\right) \Leftrightarrow D(f) = \omega f \Leftrightarrow f' = \omega f \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{C}, \quad f : x \mapsto Ce^{\omega x} \Rightarrow \\ \ker(D - \omega\,\mathrm{Id}) &= \operatorname{Vect}(x \mapsto e^{\omega x}) \Rightarrow \ker(D + \omega\,\mathrm{Id}) = \operatorname{Vect}\left(x \mapsto e^{-\omega x}\right)\end{aligned}$$

10. Montrons pour tout entier k, la propriété $(\mathcal{H}_k)$: " y est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$ ".
Initialisation $k = 0$. Comme y est 2 fois dérivables, elle est 0 fois dérivable donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons $(\mathcal{H}_k)$ vraie. y est k fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et $y'' = \omega^2 y$ donc y'' est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où y est $k+2$ fois dérivables ce qui montre que y est $k+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $(\mathcal{H}_{k+1})$ est vraie ce qui achève la récurrence.
Comme y est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout entier k, on en déduit que $y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = G$. En outre, on a :

$$\begin{aligned}y'' - \omega^2 y &= 0 \Leftrightarrow y \in \ker\left(D^2 - \omega^2 \underset{G}{\mathrm{Id}}\right) = \ker\left(D - \omega \underset{G}{\mathrm{Id}}\right) \oplus \ker\left(D + \omega \underset{G}{\mathrm{Id}}\right) \\ &= \operatorname{Vect}(x \mapsto e^{\omega x}) \oplus \operatorname{Vect}\left(x \mapsto e^{-\omega x}\right) = \operatorname{Vect}\left(x \mapsto e^{\omega x}, x \mapsto e^{-\omega x}\right) \\ &\Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \quad y : x \mapsto \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}.\end{aligned}$$

PARTIE III : Étude spectrale de H

11. Comme $\ker(H - 0\,\mathrm{Id}) = \ker(H) = \{0_E\}$ (question I.5), on en déduit que $0 \notin \operatorname{Sp}(H)$ donc $\lambda \neq 0$

12. Comme $f \in E$, $H(f) = \lambda f$ et que $\lambda \neq 0$, d'après la question I.5, on en déduit que :

$$f = \frac{1}{\lambda} H(f) \in F \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} f(0) = f'(\pi) = 0 \\ f'' = \dfrac{1}{\lambda}(H(f))'' \underset{\text{q.I.3}}{=} \dfrac{1}{\lambda}(-f) \Leftrightarrow f'' + \dfrac{1}{\lambda} f = 0. \end{array}\right.$$

13. $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}$ convient. Si y est solution de $(\mathcal{S}_\lambda)$ alors $y'' - \omega^2 y = 0$ donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ telle que $y : x \mapsto \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}$. En outre, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\omega e^{\omega\pi} - \beta\omega e^{-\omega\pi} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \beta = -\alpha \\ \alpha \underbrace{\omega}_{>0} \underbrace{\left(e^{\omega\pi} + e^{-\omega\pi}\right)}_{>0 \text{ car } \omega\pi, -\omega\pi \in \mathbb{R}} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = -\alpha \\ \alpha = 0 \quad (\div(\omega(e^{\omega\pi} + e^{-\omega\pi}))) \end{array}\right. \Leftrightarrow y : x \mapsto 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

14. $\omega = \dfrac{i}{\sqrt{\lambda}}$ convient. Si y est solution de $(\mathcal{S}_\lambda)$ alors $y'' - \omega^2 y = 0$ donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ telle que $y : x \mapsto \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}$. En outre, on a :

$$\left\{\begin{array}{c} y(0) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\omega e^{\omega\pi} - \beta\omega e^{-\omega\pi} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \beta = -\alpha \\ \alpha \underbrace{\omega}_{>0} \left(e^{\omega\pi} + e^{-\omega\pi}\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \beta = -\alpha \\ \alpha\left(e^{i\pi/\sqrt{\lambda}} + e^{i\pi/\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \quad (\div\omega) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \beta = -\alpha \\ \alpha 2\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \end{array}\right. .$$

Si $\alpha = 0$ alors $\beta = 0$ donc $y = 0$. Si $\alpha \neq 0$ alors

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) &= 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + k\pi \underset{\div\pi}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{Z},\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}_{\geqslant 0} = \frac{2k+1}{2} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ \omega = \frac{i}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2k+1}{2} i \Rightarrow y : x \mapsto \alpha\left(e^{\omega x} - e^{\omega x}\right) \\ &\in \operatorname{Vect}\left(x \mapsto e^{\omega x} - e^{\omega x}\right) = \operatorname{Vect}\left(x \mapsto \exp\left(\frac{2k+1}{2} i x\right) - \exp\left(-\frac{2k+1}{2} i x\right)\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(x \mapsto 2i \sin\left(\frac{2k+1}{2} x\right)\right) = \operatorname{Vect}\left(x \mapsto \sin\left(\frac{2k+1}{2} x\right)\right). \end{aligned}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\omega = \dfrac{2k+1}{2} i$, la fonction $y_k : x \mapsto \sin\left(\dfrac{2k+1}{2} x\right)$ est non nulle, de classe C^2 sur $[0, \pi]$ et vérifie

$$y_k'' - \omega^2 y_k = 0 \Leftrightarrow y_k'' + \frac{1}{\lambda} y_k = 0, \quad y_k(0) = 0, \quad y_k'(\pi) = \frac{2k+1}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = 0$$

donc elle est solution de $(\mathcal{S}_\lambda)$.

15. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(H)$ alors $\lambda \neq 0$ et il existe $f \in E \backslash \{0\}$ telle que $H(f) = \lambda f$. D'après la question précédente, cela entraine qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{1}{\lambda} = -\left(\frac{2k+1}{2} i\right)^2 = \frac{(2k+1)^2}{4} \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{(2k+1)^2}.$$

Pour cette valeur, la fonction $y_k : x \mapsto \sin\left(\dfrac{2k+1}{2} x\right)$ appartient à $F \backslash \{0\}$. D'après la question I.4, on a :

$$y_k = H\left(-y_k''\right) = H\left(\frac{1}{\lambda} y_k\right) = \frac{1}{\lambda} H(y_k) \Rightarrow H(y_k) = \lambda y_k$$

donc $\dfrac{4}{(2k+1)^2}$ est valeur propre de H. Par conséquent, on a :

$$\operatorname{Sp}(H) = \left\{\frac{4}{(2k+1)^2}, \quad k \in \mathbb{N}\right\}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad E_{4/(2k+1)^2}(H) = \operatorname{Vect}\left(x \mapsto \sin\left(\frac{2k+1}{2} x\right)\right).$$

16. Les espaces propres de H étant en somme directe, on en déduit que la famille de fonctions $\left(x \mapsto \sin\left(\dfrac{2k+1}{2} x\right)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre.