Pour Mardi

Exercice 1. Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1,1[$.
2. (Pour les plus courageux calculatoire) Calculer $f'(x)$ et en déduire que $f(x) = \arctan\left(\frac{x\sin x}{1 - x\cos x}\right)$.

Exercice 2 (**)**.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(t) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)}\right)$.

1. Etudier la convergence simple et uniforme de la série de terme général f_n puis la continuité de la somme f.
2. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$ à l'aide de la formule de Stirling.

Pour Mercredi

faire les exercices 25 et 26 de la banque.

Pour Jeudi

Exercice 3. Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.

1. Domaine de définition de f. On étudie ensuite f sur $]1,+\infty[$.
2. Continuité de f et limites de f en 1 et $+\infty$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

Exercice 4. Montrer que

$$u_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$$

est définie pour $n \geqslant 1$.
Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}.$$

En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Pour vendredi

Faire les exercices 19 et 27 de la banque.