ANA-PLD-4

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.

La calculatrice est autorisée.

Exercice

Soit pour $x \geq 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln(1 + \frac{x}{n}).$$

a) Justifier que f est bien définie sur $I = [0, +\infty[$ et qu'elle est dérivable sur I.

b) Donner un équivalent de f en 0^+.

c) Donner une expression intégrale de f' et en déduire un équivalent en $+\infty$ de f.

correction

a) Pour $x \geq 0$, $n \mapsto \ln(1 + \frac{x}{n})$ est décroissante ,a pour limite 0 quand $n \to +\infty$ donc le critère des séries alternées donne la convergence simple de la série donc l'existence de f. Si on note

$$f_n(x) = (-1)^{n-1} \ln(1 + \frac{x}{n})$$

les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+x}$, la série $\sum f_n$ converge simplement, $n \mapsto \dfrac{1}{n+x}$ est décroissante de limite 0 donc le critère des séries alternées donne la convergence de la série et la majoration du reste :

$\mid \displaystyle\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x} \mid \leq \frac{1}{N+1+x}$ donc $\| \; R_n \; \|_\infty \leq \dfrac{1}{N+1}$ la série des dérivées converge uniformément sur $[0, +\infty[$ (convergence uniforme du reste vers 0). Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$

$$\forall x \geq 0 \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}.$$

b) Le DL1 en 0 de f donne la solution :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$$

où $f(0) = 0$ et $f'(0) = \ln(2)$.

pour cette dernière égalité, on pourra demander une méthode pour trouver ce résultat par ex à l'aide de $\displaystyle\int_0^1 (\sum_{k=0}^{n} (-x)^k) \mathrm{d}x$. Finalement :

$$f(x) \underset{0}{\sim} \ln(2)x$$

c)

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x} = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \int_0^1 t^{x+n-1} \mathrm{d}t = \int_0^1 t^x \frac{1-(-t)^N}{1+t} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\mathrm{d}t + (-1)^{N-1}\int_0^1 \frac{t^{x+N}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

On majore la dernière intégrale :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{x+N}}{1+t}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{x+N}\mathrm{d}t = \frac{1}{N+x+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $f'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\mathrm{d}t$. En posant $t^x = u$ (de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone)

$$f'(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{x}}}{1+u^{\frac{1}{x}}}\mathrm{d}u$$

et par convergence dominée

$$\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{x}}}{1+u^{\frac{1}{x}}}\mathrm{d}u \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}.$$

donc $f'(x) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$. La sommation des relations de comparaison n'est pas au programme , on finit par la démonstration sur l'exemple de ce théorème : $f'(x) = \dfrac{1}{2x} + \epsilon(x)\dfrac{1}{2x}$ que l'on intègre entre 1 et x.

$$f(x) - f(1) = \frac{1}{2}\ln(x) + \int_1^x \epsilon(t)\frac{1}{2t}\mathrm{d}t$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on choisit X tel que $\forall x \geq X$, $\mid \epsilon(x) \mid \leq \epsilon$ donc
$f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x) + C + \epsilon\displaystyle\int_X^x \frac{1}{2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(x) + C + \frac{\epsilon}{2}(\ln(x) - \ln(X))$ où C est une constante indépendante de x.
comme $\dfrac{1}{2}\ln(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (cas de la divergence), on a :
finalement $f(x) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\ln(x)$.

ALG-PLD-4

exercicecreation 28 mars 2015

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.

La calculatrice est autorisée.

Exercice Soient E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme de E ; on notera $(.\mid.)$ le produit scalaire.

a) On suppose que u possède deux valeurs propres réelles λ et μ de signes opposés. Montrer qu'il existe $z \in E$ non nul tel que $u(z)$ soit orthogonal à z.

b) On suppose u symétrique de trace nulle. Montrer qu'il existe $z \in E$ non nul tel que $u(z)$ soit orthogonal à z.

c) Montrer que si u est de trace nulle, il existe $z \in E$ non nul tel que $u(z)$ soit orthogonal à z.

d) Montrer que si u est de trace nulle, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est à termes diagonaux nuls.

1 ANA-CT-8

Attention le corrigé ne correponde à l'"énocné

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(2n+1)}$

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Calculer $f(x)$ pour $x \in [0, 1[$
3. Calculer $f(1)$, et trouver un équivalent de $f(x) - f(1)$ lorsque $x \to 1$.

Rép.

1. La fonction f est la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_n \sim \frac{1}{2n^2}$, donc le rayon de convergence est 1 , et l'intervalle de convergence $[-1, 1]$.

2. il ya convergence normale sur$[-1, 1]$ donc uniforme et cela passe facile

2. Supposons $x > 0$. On pose $x = u^2$ et on obtient $f(x) = \frac{2}{u} g(u)$, avec $g(x) = \sum_1^{\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n(2n+1)}$.

La convergence normale dans $[0, 1]$ permet d'échanger $\int$ et $\sum$, donc

$$g'(u) = \sum_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{2n}$$

L' intervalle de convergence de cette série est $[0, 1[$, donc pour tout $u \in [0, 1[$,

$$g''(u) = \sum_1^{+\infty} u^{2n-1} = u \sum_0^{+\infty} u^{2n} = \frac{u}{1 - u^2}$$

En intégrant, on obtient $g'(u) = -\frac{1}{2}(\ln(1-u) + \ln(1+u))$, puis

$$g(u) = \frac{1}{2}((1-u)\ln(1-u) - (1+u)\ln(1+u) + 2u)$$

Finalement $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}((1-\sqrt{x})\ln(1-\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x})\ln(1+\sqrt{x})) + 2$, pour $x \in [0, 1[$.

3. Posons $x = 1 - t$. On cherche un DL de f pour $t \to 0+$.

$\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t)$

$(1-\sqrt{x})\ln(1-\sqrt{x}) = \left(\frac{1}{2}t + o(t)\right)(-\ln 2 + \ln t + o(1)) = -\frac{\ln 2}{2}t + \frac{1}{2}t\ln t + o(t\ln t)$.

$(1+\sqrt{x})\ln(1+\sqrt{x}) = \left(2 - \frac{1}{2}t + o(t)\right)\left(\ln 2 - \frac{1}{4}t + o(t)\right) = 2\ln 2 - \frac{1+\ln 2}{2}t + o(t)$.

Finalement $f(x) = 2 - 2\ln 2 + \frac{1}{2}t\ln t + o(t\ln t)\Big)$, donc $f(1) = 2 - 2\ln 2$ et $f(x) - (2 - 2\ln 2) \sim \frac{1}{2}t\ln t$.

Vérif. : $2 - 2\ln 2 = 0.61$.

$f(1) \leq \frac{1}{2}\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} = 0.82$.

$f(1) \geq 2\sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 2\left(\sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - 1\right) = 2\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) = 0.47$.

L'oral dure entre 25 et 30 minutes.
La calculatrice est autorisée.

Exercice

ana11-PLD

L'oral dure entre 25 et 30 minutes

La calculatrice est autorisée.

Exercice

On pose : $h : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x \ln n}$

a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de h, puis montrer que h est continue.

b) Déterminer les limites de h aux bornes de son domaine.

c) Déterminer un équivalent de h aux bornes de son domaine.

éléments de correction

d) *pour les plus rapides* La fonction h est-elle intégrable sur $\mathcal{D}$? Si oui calculer $\displaystyle\int_{\mathcal{D}} h(x)\mathrm{d}x$ à l'aide d'une série.

a) Classique : comparaison série intégrale (au programme en psi avec un énoncé moins fort qu'en MP), la série définissant h est convergente si et seulement $x > 1$. $\mathcal{D} =]1, +\infty[$. Lorsque $x \leq 1$, la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n \ln n}$ est divergente car la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$ est $\ln \circ \ln$ tendant vers $+\infty$. Lorsque $x > 1$, le terme général est en $o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ où $\alpha > 1$ donc convergente. Pour la continuité. Soit $\epsilon > 0$. Les fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{\ln n . n^x}$ sont continues sur $D = [1 + \epsilon, \infty[$. $\|f\|_\infty = \dfrac{1}{\ln n . n^{1+\epsilon}} = O\left(\dfrac{1}{n^{1+\epsilon}}\right)$ terme général d'une série convergente. On a donc convergence uniforme sur D, donc continuité sur D puis sur $\mathcal{D}$.

b) • Etude en $+\infty$: il y a convergence uniforme sur $[2, +\infty[$ et on peut utiliser le théorème du cours : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

• Etude en 1 par valeur supérieure. Soit $M > 0$, il existe n_0 tel que $\displaystyle\sum_{n=2}^{n_0} \frac{1}{\ln n . n} \geq M + 1$ car la série diverge. La fonction $\displaystyle\sum_{n=2}^{n_0} \frac{1}{\ln n . n^x}$ est continue en 1, somme finie de fonctions continues, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in]1, 1 + \alpha[, h(x) \geq H(x) \geq H(0) - 1 \geq M.$$

Donc $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} h(x) = +\infty$.

c) On procède par comparaison série intégrale ; On pose $h(x, t) = \dfrac{1}{\ln t . t^x}$ où $x > 1$ et $t \geq 2$, décroissante en t. Pour $n \geq 3$, on a l'encadrement : $\displaystyle\int_n^{n+1} h(x, t)\mathrm{d}t \leq h(x, n) \leq \int_{n-1}^{n} h(x, t)\mathrm{d}t$ inégalité de gauche valable si $n \geq 2$, ainsi :

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t.t^x} \leq h(x) \leq \frac{1}{\ln 2 2^x} + \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t.t^x}.$$

• équivalent en $+\infty$ on montre que $h(x) \sim \dfrac{1}{2^x \ln 2}$ en dominant l'intégrale , par changement de variable $u = t^x$:

$$0 \leq \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t.t^x} = \int_{2^x}^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{x}-1}\mathrm{d}u}{\ln u.u} \leq \frac{1}{x\ln 2}\int_{2^x}^{+\infty} u^{\frac{1}{x}-2}\mathrm{d}u = \frac{1}{x\ln 2}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}2^{1-x} = o\Big(\frac{1}{2^x}\Big).$$

d'où l'équivalent en modifiant le terme de gauche de l'encadrement pour faire apparaitre le premier terme $\dfrac{1}{2^x \ln 2}$.

• équivalent en 1^+, ici c'est l'autre terme qui est dominant, on pose $v = \ln t$

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t.t^x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{e^{(1-x)v}\mathrm{d}v}{v} = \int_{(x-1)\ln 2}^{+\infty} \frac{e^{-t}\mathrm{d}t}{t}.$$

Or pour $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{e^{-t}\mathrm{d}t}{t} = [\ln t e^{-t}]_\alpha^{+\infty} + \int_\alpha^{+\infty} \ln t e^{-t}\mathrm{d}t$

la deuxième intégrale est convergente quand α tend vers 0 car ln est intégrable en 0. Ainsi, quand α tend vers 0 : $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{e^{-t}\mathrm{d}t}{t} \sim -\ln\alpha e^{-\alpha} \sim -\ln\alpha$. Conclusion $h(x) \sim -\ln(x-1)$.

d) Pour l'intégrabilité on peut se contenter de faire des études locales , $o(\dfrac{1}{x^2})$ en $+\infty$ et en 1^+ l'équivalent précédent donne l'intégralité. Pour le calcul il faut un théorème d'intégration terme à terme. f_n sont intégrables, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mid f_n \mid = \frac{1}{n(\ln n)^2}$ de série convergente, $\displaystyle\sum_n f_n$ sont convergente vers une fonction continue par morceaux.

$$\int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}.$$

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que la matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -10 \\ -10 & 5 & 0 \\ 6 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier : $\mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}(f)$.

b) Ecrire la matrice de f dans une base orthonormée directe de E formée d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(f)$.

c) En déduire la nature géométrique de f.