1 Pour Mardi

Répondre oui ou non . En cas de réponse négative donner un contre-exemple.

1. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum(-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum(-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.
3. Si la série $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence infini, alors elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
4. Si $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence fini $R > 0$, alors sa somme admet une limite infinie en $(-R)^+$ ou en R^-.
5. Si $f(x) = \sum a_n x^n$ a un rayon de convergence infini et si les a_n sont strictement positifs, alors pour tout entier p, $\frac{f(x)}{x^p} \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

2 Pour Mercredi

Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$$

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
b) Etudier la convergence en $-R$ et en R.
c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.
d) Montrer que quand $x \to 1^-$

$$(1-x)f(x) \to 0$$

3 Pour Jeudi

Soit I l'ensemble des réels x tels que la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$$

converge. On note $f(x)$ la somme de cette série entière.

1. Déterminer I.
2. On pose

$$a_1 = -1 \, et \, a_n = -ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \, pour \, n \geq 2$$

   Déterminer le domaine de définition de

$$g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

3. Trouver une relation entre f et g.
4. Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.
5. Donner la limite de $f(x)$ quand $x \to -1^+$

4 Pour Vendredi

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$. Prouver que le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est non nul et calculer sa somme. En déduire la valeur de a_n.

Exercice 2 Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{x}$ se prolongent en deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$(1) : \int_0^1 f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \times n!}, \quad (2) : \int_0^1 g = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

En déduire les valeurs approchées à $0,01$ près de ces deux intégrales.