Devoir à rendre le samedi 25 janvier

L'usage d'un corrigé facile à trouver est interdit

NB La partie préliminaire est tr es calculatoire. Il serait bon de la traiter avant Samedi. Vous me direz ce que vous trouvez pour la matrice de passage et pour la matrice U.

Il y a de nombreuses questions de cours : vous pouvez ou pas les rédiger.Mais au minimum signaler le.

Calculs de distances entre une matrice et certaines parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Notations

Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note :
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n.
$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à n lignes et à une colonne.
Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est sa matrice transposée, $rang(A)$ son rang et $Tr(A)$ sa trace.
I_n : la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices positives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire des matrices A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geqslant 0$.
$GL_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices réelles orthogonales c'est-à-dire des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : ${}^tMM = I_n$.
Pour p entier naturel, Δ_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang supérieur ou égal à p et ∇_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à p.

Objectifs

Le but du sujet est de calculer la distance (par la norme de Schur définie à la question II.3.) d'une matrice à :
dans la partie II., $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de projection orthogonale,
dans la partie III., $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de décomposition polaire,
dans la partie IV., Δ_p par des notions de densité,
dans la partie V., ∇_p par le théorème de Courant et Fischer.
La partie I. traite un exemple qui sera utilisé dans les différentes parties.
Remarque : dans le texte, le mot "positif" signifie "supérieur ou égal à 0".

I. Exercice préliminaire

1. Soit la matrice $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $H = {}^t\Gamma\Gamma$. Diagonaliser la matrice H et déterminer une matrice P de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à termes tous positifs telles que $D^2 = P^{-1}HP$.

2. On pose $S = PDP^{-1} \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$, montrer que la relation $\Gamma = US$ définit une matrice $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et calculer cette matrice.

II. Calcul de la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

3. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A|B) = Tr({}^tAB)$.
Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée : $\|A\| = ((A|A))^{\frac{1}{2}}$. Dans tout le sujet, si Π est une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la distance d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la partie Π est le réel $d(A,\Pi) = \inf\limits_{M\in\Pi} \|A - M\|$.

4. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que cette somme directe est orthogonale.

5. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|\dfrac{1}{2}(A - {}^tA)\|$ et déterminer de même $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

6. Calculer $d(\Gamma, \mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

III. Calcul de la distance de A à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

A. Théorème de la décomposition polaire

7. Montrer qu'une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

8. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que la matrice ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

9. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, d_2, ..d_n)$ à termes positifs telle que ${}^tAA = D^2$.
On note $A_1, A_2, .., A_n$ les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui forment les colonnes de la matrice A.

a. Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels compris entre 1 et n, évaluer ${}^tA_iA_j$. En particulier, si i est un entier pour lequel $d_i = 0$, que vaut A_i ?

b. Montrer que l'on peut trouver une base orthonormée $(E_1, E_2, ..., E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (par rapport au produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$, de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) telle que, pour tout entier naturel i entre 1 et n, $A_i = d_iE_i$.

c. En déduire qu'il existe une matrice E de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = ED$.

10. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAA = {}^tBB$.

a. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à termes positifs et une matrice orthogonale P telles que : $P^{-1\,t}AAP = P^{-1\,t}BBP = D^2$.

b. Montrer qu'il existe une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = UB$.

11. Déduire des questions précédentes le théorème de décomposition polaire : Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$. (Remarque : on peut également établir l'unicité de la matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et même l'unicité de la matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si A est de plus inversible dans cette décomposition mais ce ne sera pas utile pour la suite du problème).

B. Calcul de $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

12. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|M\Omega\| = \|\Omega M\| = \|M\|$.

13. Dans la suite de cette partie, soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$; il existe une matrice diagonale D et une matrice P de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^{-1}$.

a. Montrer que, pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A - \Omega\| = \|S - U^{-1}\Omega\|$ et en déduire que, $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

b. Montrer que, $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

14. On note $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$

a. Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|D - \Omega\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - 2Tr(D\Omega) + n$

b. Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $Tr(D\Omega) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$.

c. Conclure que $d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|$.

15. Montrer que , $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - U\|$.

16. Calculer $d(\Gamma, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

IV. Calcul de la distance de A à Δ_p.

17. Un résultat de densité.

a. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout réel λ vérifiant $0 < \lambda < \alpha$, la matrice $M - \lambda I_n$ estinversible.

b. En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

18. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer, pour tout entier naturel $p \leqslant n$, $d(A, \Delta_p)$.

V. Calcul de la distance de A à ∇_p.

A. Théorème de Courant et Fischer

Soit A une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On notera $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant .. \geqslant \lambda_n$ ses valeurs propres, on notera $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$, P la matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = PD^tP$ et $C_1, C_2, .., C_n$ les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formant les colonnes de la matrice P.
Si k est un entier entre 1 et n, on note Ψ_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k. Nous allons montrer que :
$\lambda_k = \max\limits_{F \in \Psi_k} \min\limits_{X \in F - \{0\}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$. (théorème de Courant et Fischer).

19. Soit X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées $(x_1, x_2, .., x_n)$ dans la base orthonormée $(C_1, C_2, .., C_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer en fonction des x_i et λ_i. (i compris entre 1 et n) : ${}^tXAX$ et ${}^tXX$ et pour k entier entre 1 et n, $\dfrac{{}^tC_kAC_k}{{}^tC_kC_k}$.

20. Soit k entier entre 1 et n, on pose $F_k = \mathrm{vect}\{C_1, C_2, .., C_k\}$. Montrer que pour tout X non nul de F_k , $\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} \geqslant \lambda_k$ et déterminer $\min\limits_{X \in F_k - \{0\}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$.

21. Soit $F \in \Psi_k$

a. montrer que $dim(F \cap \mathrm{vect}\{C_k, C_{k+1}, .., C_n\}) \geqslant 1$.

b. Si X est un vecteur non nul de $F \cap \mathrm{vect}\{C_k, C_{k+1}, .., C_n\}$, montrer que $\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} \leqslant \lambda_k$.

22. Conclure.

B. Calcul de $d(A, \nabla_p)$

Dans toute cette partie : A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r et p est un entier naturel, $p < r$.

23. Montrer qu'il existe deux matrices E et P de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à termes positifs telles que $A = EDP$. En déduire que le rang de la matrice ${}^tAA$ est encore r. (On pourra utiliser les résultats de la question **9.**)

24. Si on note les valeurs propres de la matrice symétrique réelle ${}^tAA$ de rang r : $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant .. \geqslant \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = .. = \mu_n = 0$, si on pose $D = \mathrm{diag}(\sqrt{\mu_1}, \sqrt{\mu_2}, .., \sqrt{\mu_r}, 0..., 0)$, si pour $1 \leqslant l \leqslant n$ on note M_l la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la l-ième colonne est celle de la matrice $E \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de la question **23.**, tous les autres termes de M_l étant nuls, on a clairement : $ED = \sum\limits_{l=1}^{n} \sqrt{\mu_l} M_l$.

Montrer alors qu'il existe une famille orthonormale $(R_1, R_2, .., R_n)$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ (pour le produit scalaire $(A|B) = Tr({}^tAB)$ de $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$), toutes de rang un, et telles que $A = \sum_{l=1}^{n} \sqrt{\mu_l} R_l = \sum_{l=1}^{r} \sqrt{\mu_l} R_l$.

25. Avec les notations de la question **24.**, on pose $N = \sum_{l=1}^{p} \sqrt{\mu_l} R_l$.
Montrer que rang$(N) \leqslant p$ puis que $d(A, \nabla_p) \leqslant \sqrt{\mu_{p+1} + .. + \mu_r}$.

26. Soit M une matrice de rang p $(p < r)$, on note $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_n \geqslant 0$ les valeurs propres de la matrice ${}^t(A-M)(A-M)$ et on pose $G = \mathrm{Ker}M \cap \mathrm{Im}({}^tAA)$.
Soit k un entier compris entre 1 et $r - p$.

a. Montrer que $\dim G \geqslant r - p$.
b. Soit F un sous-espace vectoriel de G de dimension k, montrer que : $\alpha_k \geqslant \min\limits_{X \in F - \{0\}} \dfrac{{}^tX{}^tAAX}{{}^tXX}$.
c. On note $(V_1, V_2, .., V_n)$ une base de $\mathrm{I\!R}^n$ formée de vecteurs propres de la matrice ${}^tAA$, le vecteur V_i étant associé à la valeur propre μ_i de telle sorte que : $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant .. \geqslant \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = .. = \mu_n = 0$.
Montrer que $\dim(G \cap \mathrm{vect}\{V_1, V_2, .., V_{k+p}\}) \geqslant k$.
d. En déduire que $\alpha_k \geqslant \mu_{k+p}$.

27. En déduire $d(A, \nabla_p)$.

28. Calculer, pour $p \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\gamma_p = d(\Gamma, \nabla_p)$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.