• **Partie I**

1. . On calcule $H = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, puis $\chi_H = X^3 - 18X^2 + 33X - 16 = (X - 1)^2(X - 16)$.

. La recherche des sous-espaces propres conduit à $E_{16} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ (on choisit deux vecteurs propres orthogonaux).

. On a donc $D^2 = P^{-1}HP$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$.

2. . S est diagonalisable à valeurs propres non nulles, donc S est inversible. La relation $\Gamma = US$ définit donc la matrice $U = \Gamma S^{-1}$; on vérifie qu'elle est orthogonale :

$${}^t U U = S^{-1} {}^t \Gamma \Gamma S^{-1} = S^{-1} H S^{-1} = P D^{-1} P^{-1} H P D^{-1} P^{-1} = P D^{-1} D^2 D^{-1} P^{-1} = I_3.$$

. $U = \Gamma S^{-1} = \Gamma P D^{-1} P^{-1} = \Gamma P D^{-1} {}^t P$. Le calcul explicite donne $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

• **Partie II**

3. $\text{Tr}({}^t A B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}$. On reconnaît le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. On voit immédiatement que pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe un unique $(B, C) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = B + C$, à savoir $B = \frac{1}{2}(A + {}^t A)$ et $C = \frac{1}{2}(A - {}^t A)$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont donc supplémentaires.

Ils sont aussi orthogonaux car pour tout $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$:

$$(S | A) = \text{Tr}({}^t S A) = \text{Tr}(S A) = \text{Tr}(A S) = -\text{Tr}({}^t A S) = -(A | S) = -(S | A), \text{ donc } (S | A) = 0.$$

5. D'après le théorème de meilleure approximation, la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est la norme du projeté orthogonal de A sur l'orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, lequel est $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ d'après 4.

La décomposition explicite du 4. donne donc, avec les mêmes notations : $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|C\| = \left\| \frac{A - {}^t A}{2} \right\|$.

De la même façon, on obtient : $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \|B\| = \left\| \frac{A + {}^t A}{2} \right\|$.

6. $\frac{\Gamma + {}^t \Gamma}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, donc $d(\Gamma, \mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = 2\sqrt{2}$.

• **Partie III**

7. C'est une question de cours. Par théorème, il existe $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $S = P^{-1} D P = {}^t P D P$; les valeurs propres λ_i de S sont les termes diagonaux de D .

Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t X S X = {}^t (P X) D (P X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (P X)_i^2$. Comme $P X$ décrit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en même temps que X ,

il est évident que ${}^t X S X$ est positif pour tout X si et seulement si tous les λ_i sont positifs.

8. - ${}^t ({}^t A A) = {}^t A ({}^t A) = {}^t A A$, donc ${}^t A A$ est symétrique.

- Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t X {}^t A A X = {}^t (A X) (A X) = \sum_{i=1}^n (A X)_i^2 \geq 0$, donc ${}^t A A$ est positive.

9. a) Par définition de la multiplication des matrices, ${}^t A_i A_j$ est le coefficient d'indice (i, j) de ${}^t A A$.

Comme ${}^t A A = D^2$ par hypothèse, ${}^t A_i A_j = d_i^2 \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker).

Dans le cas où $d_i = 0$, il vient ${}^t A_i A_i = 0 = \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2$, d'où $A_i = 0$.

b) Le a) montre que la famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthogonale et que $\|A_i\| = d_i$.

Notons I l'ensemble des $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $d_i \neq 0$ et posons, pour $i \in I$, $E_i = \frac{A_i}{d_i}$.

La famille $(E_i)_{i \in I}$ est orthonormale par construction ; elle est donc complétable en une base orthonormale $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on a encore $A_i = d_i E_i$ lorsque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I$ puisque dans ce cas $A_i = 0$.

c) Soit E la matrice dont les colonnes sont les E_i . Par construction, $E \in O_n(\mathbb{R})$ et les colonnes de ED sont les $d_i E_i = A_i$, c'est-à-dire que $A = ED$.

10. a) La matrice tAA est symétrique positive selon 8. ; elle est donc orthodiagonalisable, et ses valeurs propres sont positives selon 7. Il existe donc $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}{}^tAAP$ soit diagonale à termes positifs.

Soit alors D la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les racines carrées de ceux de $P^{-1}{}^tAAP$; D est diagonale à termes positifs et $P^{-1}{}^tAAP = P^{-1}{}^tBPP = D^2$.

b) Le résultat du a) se réécrit ${}^t(AP)AP = {}^t(BP)BP = D^2$. L'application de 9. à AP et BP fournit deux matrices orthogonales E et F telles que $AP = ED$ et $BP = FD$. On en déduit que $A = UB$, avec $U = EF^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

11. Comme au 10.a), on peut écrire ${}^tAA = PD^2P^{-1}$, avec P orthogonale et D diagonale à termes positifs.

La matrice $S = PDP^{-1}$ est par construction symétrique positive et vérifie ${}^tAA = S^2 = {}^tSS$.

On peut alors appliquer le 10.b) : il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = US$.

12. $\|M\Omega\|^2 = \text{Tr}({}^t(M\Omega)(M\Omega)) = \text{Tr}({}^t\Omega{}^tMM\Omega) = \text{Tr}(\Omega{}^t\Omega{}^tMM) = \text{Tr}({}^tMM) = \|M\|^2$.

$\|\Omega M\|^2 = \text{Tr}({}^t(\Omega M)(\Omega M)) = \text{Tr}({}^tM{}^t\Omega\Omega M) = \text{Tr}({}^tMM) = \|M\|^2$.

13. a) $A - \Omega = U(S - U^{-1}\Omega)$ et $U \in O_n(\mathbb{R})$ donc, d'après 12., $\|A - \Omega\| = \|S - U^{-1}\Omega\|$; de plus, la matrice $U^{-1}\Omega$ décrit $O_n(\mathbb{R})$ quand Ω décrit $O_n(\mathbb{R})$. Il en résulte que $d(A, O_n(\mathbb{R})) = d(S, O_n(\mathbb{R}))$.

b) La question 12. donne encore, pour tout $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $\|S - \Omega\| = \|PDP^{-1} - \Omega\| = \|D - P^{-1}\Omega P\|$.

Comme au a), $P^{-1}\Omega P$ décrit $O_n(\mathbb{R})$ quand Ω décrit $O_n(\mathbb{R})$, d'où $d(S, O_n(\mathbb{R})) = d(D, O_n(\mathbb{R}))$, puis le résultat.

14. a) $\|D - \Omega\|^2 = \|D\|^2 - 2(D | \Omega) + \|\Omega\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2 \text{Tr}(D\Omega) + n$.

b) $\text{Tr}(D\Omega) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_{i,i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i$, car $\omega_{i,i} \leq 1$ et $\lambda_i \geq 0$.

c) L'inégalité du b) est une égalité pour $\Omega = I_n$. Il résulte donc du a) que $\|D - \Omega\|$ est minimal lorsque $\Omega = I_n$, c'est-à-dire que $d(D, O_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|$.

15. 13.b) et 14.c) donnent $d(A, O_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|$. En utilisant encore 12., on en déduit :

$$d(A, O_n(\mathbb{R})) = \|P^{-1}SP - I_n\| = \|S - PP^{-1}\| = \|S - I_n\| = \|US - U\| = \|A - U\|.$$

16. On a ici $\Gamma - U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, donc $d(\Gamma, O_3(\mathbb{R})) = \|\Gamma - U\| = 3$.

• Partie IV

17. a) On sait que l'ensemble des valeurs propres réelles strictement positives de M est fini ; si il est non vide, notons α son plus petit élément et si il est vide, posons par exemple $\alpha = 1$.

Par construction, pour $\lambda \in]0, \alpha[$, λ n'est pas valeur propre de M , et $M - \lambda I_n$ est donc inversible.

b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La suite de terme général $M - \frac{\alpha}{p+2} I_n$ converge vers M et, d'après a), elle est à termes dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. Cela prouve la densité de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

18. Pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \Delta_n \subset \Delta_p$, donc Δ_p est *a fortiori* dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $d(A, \Delta_p) = 0$.

• **Partie V**

19. - ${}^tXAX = {}^tXPD{}^tPX = {}^t({}^tPX)D({}^tPX) = {}^t(P^{-1}X)D(P^{-1}X)$. P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{C} = (C_i)_{1 \leq i \leq n}$, donc, d'après la formule de changement de base, $P^{-1}X$ est la matrice colonne formée des coordonnées de X dans la base $\mathcal{C}$, c'est-à-dire des x_i . Par suite, ${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$.

- ${}^tXX = \|X\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, puisque la base $\mathcal{C}$ est orthonormale.

- En prenant $X = C_k$, c'est-à-dire $x_i = \delta_{i,k}$, on obtient $\frac{{}^tC_kAC_k}{{}^tC_kC_k} = \lambda_k$.

20. Pour $X \in F_k \setminus \{0\}$, avec les notations de 19., on a $x_i = 0$ pour $i > k$, donc :

$$\frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^k x_i^2} \geq \frac{\lambda_k \sum_{i=1}^k x_i^2}{\sum_{i=1}^k x_i^2} = \lambda_k.$$

D'autre part, toujours d'après 19., l'égalité est réalisée pour $X = C_k$, donc $\min_{X \in F_k \setminus \{0\}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k$.

21. a) La somme des dimensions des sous-e.v. F et $\text{Vect}(C_k, \dots, C_n)$ est $n+1$; d'après la formule de Grassmann (ou formule des quatre dimensions), la dimension de leur intersection est supérieure ou égale à 1.

b) Pour un tel X , on a $x_i = 0$ pour $i < k$.

On procède alors comme au 20., mais en majorant cette fois le numérateur $\sum_{i=k}^n \lambda_i x_i^2$ par $\lambda_k \sum_{i=k}^n x_i^2$.

22. La question 21.b) montre que pour tout $F \in \Psi_k$, le minimum sur $F \setminus \{0\}$ de $\frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$ est inférieur ou égal à λ_k , et la question 20. montre que, lorsque $F = F_k$, ce minimum est exactement λ_k . Ainsi, λ_k est bien le maximum des minimums ; c'est ce qu'on voulait démontrer.

Remarque : l'énoncé ne demande pas de justifier, pour F quelconque dans Ψ_k , l'existence du minimum sur $F \setminus \{0\}$ de la fonction $f_A : X \mapsto \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$. Elle résulte de la continuité de f_A , de son homogénéité ($f_A(kX) = f_A(X)$) et de la compacité de la sphère unité de F .

23. - On repart de la décomposition polaire $A = US$ obtenue au 11. S étant symétrique positive, il existe une matrice diagonale D à termes positifs et une matrice orthogonale P telles que $S = P^{-1}DP$.

On obtient alors $A = EDP$, avec $E = UP^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

- Il vient ensuite ${}^tAA = {}^tPD{}^tEEDP = {}^tPD^2P$. Par équivalence, $\text{rg } A = \text{rg } D$ et $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(D^2)$, mais D et D^2 ont évidemment le même rang (elles ont le même nombre d'éléments diagonaux non nuls) ; finalement, $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg } A = r$.

24. Pour $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $R_\ell = M_\ell P$.

$$- A = EDP = \left(\sum_{\ell=1}^n \sqrt{\mu_\ell} M_\ell \right) P = \sum_{\ell=1}^n \sqrt{\mu_\ell} R_\ell = \sum_{\ell=1}^r \sqrt{\mu_\ell} R_\ell.$$

- Pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{rg } R_\ell = \text{rg } M_\ell = 1$ (en effet P est inversible et toutes les colonnes de E sont non nulles).

$$- (R_k | R_\ell) = \text{Tr}({}^tR_k R_\ell) = \text{Tr}({}^tP {}^tM_k M_\ell P) = \text{Tr}(P {}^tP {}^tM_k M_\ell) = \text{Tr}({}^tM_k M_\ell).$$

Étant donnée la forme des matrices M_k et M_ℓ , le seul coefficient éventuellement non nul du produit ${}^tM_k M_\ell$ est celui d'indice (k, ℓ) , et il est égal au produit scalaire canonique des colonnes d'indice k et ℓ de la matrice E , c'est-à-dire à $\delta_{k,\ell}$ puisque E est orthogonale. Finalement, $(R_k | R_\ell) = \delta_{k,\ell}$, i.e. $(R_\ell)_{1 \leq \ell \leq n}$ est orthonormale.

La famille $(R_\ell)_{1 \leq \ell \leq n}$ ainsi définie possède toutes les propriétés demandées.

25. - On montre facilement, en passant aux applications linéaires canoniquement associées, que le rang d'une somme de matrices est inférieur ou égal à la somme de leurs rangs. Comme $\sqrt{\mu_\ell} R_\ell$ (pour $1 \leq \ell \leq r$) est de rang 1, on en déduit que $\text{rg } N \leq p$, c'est-à-dire que $N \in \nabla_p$.

$$- A - N = \sum_{\ell=p+1}^r \sqrt{\mu_\ell} R_\ell \text{ donc, puisque la famille } (R_\ell)_{1 \leq \ell \leq n} \text{ est orthonormale, } \|A - N\| = \sqrt{\sum_{\ell=p+1}^r \mu_\ell}.$$

Par définition de la distance à une partie, il en résulte que $d(A, \nabla_p) \leq \sqrt{\sum_{\ell=p+1}^r \mu_\ell}$.

26. a) Cela résulte de nouveau de la formule de Grassmann, compte tenu de $\dim(\text{Ker } M) = n - p$ (formule du rang) et $\dim(\text{Im}({}^tAA)) = \text{rg}({}^tAA) = r$ (selon 23.).

b) Pour $X \in F \setminus \{0\}$, $MX = 0$ (puisque $F \subset G \subset \text{Ker } M$) donc ${}^tX {}^tAAX = {}^tX {}^t(A - M)(A - M)X$.
Il suffit donc d'appliquer le théorème de Courant et Fischer à la matrice symétrique ${}^t(A - M)(A - M)$.

c) La formule de Grassmann s'écrit :

$$\dim(G \cap \text{Vect}(V_1, V_2, \dots, V_{k+p})) = \dim G + \dim(\text{Vect}(V_1, V_2, \dots, V_{k+p})) - \dim(G + \text{Vect}(V_1, V_2, \dots, V_{k+p})).$$

Comme $k + p \leq r$, les vecteurs propres $V_1, V_2, \dots, V_{k+p}$ de tAA sont associés à des valeurs propres non nulles, ils appartiennent donc à $\text{Im}({}^tAA)$. Le sous-e.v. $G + \text{Vect}(V_1, V_2, \dots, V_{k+p})$ est donc inclus dans $\text{Im}({}^tAA)$ et sa dimension est par conséquent inférieure ou égale à r .

D'autre part, les vecteurs $V_1, V_2, \dots, V_{k+p}$ sont linéairement indépendants, puisqu'ils sont extraits d'une base ; ils engendrent donc un sous-e.v. de dimension $k + p$. Il vient alors, compte tenu du a) :

$$\dim(G \cap \text{Vect}(V_1, V_2, \dots, V_{k+p})) \geq (r - p) + (k + p) - r = k.$$

d) D'après c), $G \cap \text{Vect}(V_1, V_2, \dots, V_{k+p})$ possède au moins un sous-e.v. de dimension k . Fixons-en un, noté F_0 .

Tout $X \in F_0 \setminus \{0\}$ s'écrit $X = \sum_{i=1}^{k+p} x_i V_i$. En appliquant 19. à tAA (en remplaçant les C_i par les V_i) et en tenant compte de la décroissance de $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n}$, il vient :

$$\frac{{}^tX {}^tAAX}{{}^tXX} = \frac{\sum_{i=1}^{k+p} \mu_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{k+p} x_i^2} \geq \frac{\mu_{k+p} \sum_{i=1}^{k+p} x_i^2}{\sum_{i=1}^{k+p} x_i^2} = \mu_{k+p}.$$

Cela montre que $\min_{X \in F_0 \setminus \{0\}} \frac{{}^tX {}^tAAX}{{}^tXX} \geq \mu_{k+p}$. Le b) permet alors de conclure que $\alpha_k \geq \mu_{k+p}$.

27. Avec les notations de 26. : $\|A - M\|^2 = \text{Tr}({}^t(A - M)(A - M)) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \geq \sum_{k=1}^{r-p} \alpha_k \geq \sum_{k=1}^{r-p} \mu_{k+p} = \sum_{k=p+1}^r \mu_k$.

On a ainsi établi que $\|A - M\| \geq \sqrt{\sum_{k=p+1}^r \mu_k}$ pour toute matrice M de rang p , où $p < r$.

Comme les μ_i sont positifs, cette inégalité est évidemment encore vraie pour les matrices de rang $q < p$; elle est donc valable pour toute $M \in \nabla_p$, ce qui signifie exactement que $d(A, \nabla_p) \geq \sqrt{\sum_{k=p+1}^r \mu_k}$.

Compte tenu du résultat de 25., on conclut que $d(A, \nabla_p) = \sqrt{\sum_{k=p+1}^r \mu_k}$.

28. Pour la matrice Γ , on a d'après 1. : $\mu_1 = 16$, $\mu_2 = \mu_3 = 1$ et $r = 3$. L'égalité de la question précédente donne :

$$\gamma_0 = 3\sqrt{2} \quad (= \|\Gamma\|), \quad \gamma_1 = \sqrt{2}, \quad \gamma_2 = 1, \quad \gamma_3 = 0 \quad (\text{trivial}).$$