1 Pour mardi

exo1 Soit $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ Montrer que A et B sont orthogonalement semblables deux matrices ssi $\chi_A = \chi_B$.
exo2
endormorphismes qui commutent avec leur adjoint Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u^* = u^* \circ u$. Soit $\lambda \in$Sp(u) et E_λ le sous-espace propre associé.
1a) Rappeler pourquoi E_λ est stable par u^*.
1b) On note v et w les restrictions de u et $u*$ à E_λ. Montrer que :

$$\forall x \in E_\lambda, \forall y \in E_\lambda,\ (\lambda Id_{|E_\lambda}(x), y) = (x, w(y)).$$

En déduire, à l'aide de la caractérisation de l'adjoint que $w^* = \lambda Id_{E_\lambda}$ donc que

$$E_\lambda(u) \subset E_\lambda(u^*).$$

1c) Conclure que u et u^* ont les même sous espaces propres.
2) Montrer que les sous-espaces propres de u sont orthogonaux.

2 Pour mercredi

exo 1 Existence et unicité d'une racine carrée
Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$
1) Montrer qu'il existe $v \in S^+(E)$, tel que $v^2 = u$.
2) Etablir l'unicité d'un tel que v. On pourra, après avoir justifié son existence, considérer les restriction de v à chaque sous-espace propre de u.
exo2 Une inégalité
Soit $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$. Montrer que pour tout $x \in E$:

$$||x||^4 \leq < u(x), x >< u^{-1}(x), x > .$$

On pourra considérer pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$;

$$< (u(x + \lambda u^{-1}(x)), x + \lambda u^{-1}(x) > .$$

3 Pour jeudi

endomorphismes antisymétriques bijectifs Soit f un endormorphisme de E tel que $f^* = -f$.
1) Ecrire l'égalité vérifiée pour tout $x \in E$ $y \in E$ que l'on déduit de $f^* = -f$.
2) Montrer que pour tout $x \in E$, x et $f(x)$ sont orthogonaux. En déduire les valeurs propres réelles possibles de f.
3) Montrer que $s = f \circ f$ est symétrique.
4) On suppose maintenant que f est bijective.
Soit λ une valeur propre de s et x un vecteur propre associé. Montrer que

$$(s(x) \mid x) = \lambda||x||^2 = -||f(x)||^2.$$

En déduire que $\lambda < 0$.
5) On considère toujours x vecteur propre de s pour λ.
Montrer que les espaces $F =$Vect$(x, f(x))$ et $F^\perp$ sont stables par f et que l'endomorphisme induit par f sur F a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ où } b > 0.$$

dans une base orthonormale bien choisie. On précisera la valeur de b en fonction de λ.
6) Conclure que la dimension de E est paire.

4 Pour vendredi hyperclassqiue vour fichier classique

Matrice de Gramm
Soit E un espace euclidien de dimension n et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On associe la matrice de Gramm G définie par

$$G = (\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

a) Montrer que G est symétrique.
Calculer pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;, $X^T G X$. En déduire que G est symétrique, positive.
b) Montrer que $G \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ssi $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre. (on retombera sur un exercice classique sur $\mathrm{Ker}(AA^T)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ car $G = AA^T$ pour une matrice A).