Des classiques

Partie III : PROBLEME

Questions préliminaires

III.1.

III.1.a Soit $s \in \mathcal{S}(E)$. Selon le théorème spectral, il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de s : s est orthodiagonalisable.

Traduction matricielle : si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que $S = PDP^{-1} = PD\,P^T$.

III.1.b $\chi_S(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(S)X + \det(S) = X^2$, donc $\mathrm{Sp}(S) = \{0\}$ et, à nouveau, si S était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc elle serait nulle, ce qui est faux.

Ainsi S est symétrique à coefficients complexes sans être diagonalisable.

III.2.

III.2.a Notons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$. Alors $s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \varepsilon_i$. Or la base β est orthonormée, donc $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$.

III.2.b Supposons que $x \in S(0,1)$. Alors $1 = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Ainsi, $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_n x_i^2 = \lambda_n$ et $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 x_i^2 = \lambda_1$.

On a bien montré que, pour tout $x \in S(0,1)$, $R_s(x) \in [\lambda_1, \lambda_n]$

III.3.

III.3.a Supposons que s est symétrique défini positif.

Soit λ une valeur propre de s. Il existe un vecteur propre x : x est non nul et $s(x) = \lambda x$.

Ainsi $0 < \langle s(x)|x\rangle = \lambda\|x\|^2$ et $\|x\| > 0$, donc $\lambda > 0$.

Si maintenant s est seulement symétrique positif, on a $0 \leqslant \lambda\|x\|^2$ donc $\lambda \geqslant 0$.

III.3.b $s_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans la base B du vecteur $s(e_j)$, or B est orthonormée, car on utilise le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, donc $s_{i,j} = \langle e_i|s(e_j)\rangle$.

En particulier, $s_{i,i} = \langle e_i|s(e_i)\rangle$, or e_i est un vecteur unitaire, donc d'après la question 2.b, $s_{i,i} = R_s(e_i) \in [\lambda_1, \lambda_n]$.

Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

III.4. Les coefficients de $M^TM - I_n$ sont des fonctions polynomiales des coefficients de M, donc d'après le cours, l'application $M \mapsto M^TM - I_n$ est continue.

III.5. D'après le cours, les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, donc pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$, ce qui implique : pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $|a_{i,j}| \leqslant 1$.

III.6. Si, pour tout $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|M\|_\infty = \max_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} |m_{i,j}|$, on définit d'après le cours une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour laquelle $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée d'après la question précédente. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est encore bornée quelque soit la norme utilisée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

De plus, si l'on note f l'application $M \mapsto M^TM - I_n$ de la question 4, alors $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{0_{n,n}\})$, or le singleton $\{0_{n,n}\}$ est un fermé et f est continue, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.7.a D'après la question 1.a, il existe une matrice P orthogonale telle que $S = P\Delta P^{-1} = P\Delta\, P^T$.

Ainsi, $T(A) = \mathrm{Tr}([AP\Delta]P^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}[AP\Delta]) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$ en posant $B = P^{-1}AP$.

A et P sont toutes deux orthogonales et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, donc B est orthogonale.

III.7.b On vérifie que, pour tout $(C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$\mathrm{Tr}((\alpha C+D)S) = \alpha\mathrm{Tr}(CS)+\mathrm{Tr}(DS)$, donc l'application $C \mapsto \mathrm{Tr}(CS)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc c'est une application continue. Sa restriction T sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est donc aussi continue. Mais $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, donc T admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

III.7.c Avec les notations de la question 7.a, $T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$, donc en convenant de noter $M_{i,j}$ le (i, j)-ème coefficient d'une matrice M, $T(A) = \sum_{i=1}^{n}(B\Delta)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{i,j}\Delta_{j,i}$, mais Δ est diagonale, donc $T(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_{i,i}$.

D'après la question 5, et les λ_i étant positifs, $T(A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(S)$.

Ainsi $t \leqslant \mathrm{Tr}(S)$, mais de plus $\mathrm{Tr}(S) = T(I_n)$ et I_n est une matrice orthogonale, donc $t = \mathrm{Tr}(S)$.

Inégalité d'Hadamard

III.8. L'inégalité demandée est une conséquence de l'inégalité aritmético-géométrique, car on sait que $\det(S) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\mathrm{Tr}(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

III.9. On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^n$.

Soit $X \in \mathbb{R}^n$. $X^TS_\alpha X = (DX)^TS(DX) \geqslant 0$ car $DX \in \mathbb{R}^n$ et car S est symétrique positive. Ceci montre que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n}(\,D^TSD)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{(j,k)\in\{1,\dots,n\}^2} [\,D^T]_{i,j}S_{j,k}D_{k,i}$, mais D est diagonale, donc $\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 s_{i,i}$.

III.10. On peut appliquer l'inégalité $(*)$ à la matrice S_α car elle est bien dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$,

or $\det(S_\alpha) = \det(D)^2\det(S) = \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_{i,i}\right)^2 \det(S)$ et $\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_{i,i}} s_{i,i} = 1$,

donc $\det(S) \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{i,i}}\right)^2 = \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$.

III.11. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^T S_\varepsilon X = X^T S X + \varepsilon \|X\|^2 \geqslant 0$, donc $S_\varepsilon \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. De plus d'après la question 3.b, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant s_{i,i}$, donc $s_{i,i} + \varepsilon > 0$, ce qui permet d'appliquer l'inégalité de la question précédente à S_ε : pour tout $\varepsilon > 0$, $\det(S_\varepsilon) \leqslant \prod_{i=1}^{n} (s_{i,i} + \varepsilon)$.

De plus il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donc $S_\varepsilon = P(\Delta + \varepsilon I_n)P^{-1}$, ce qui prouve que $\det(S_\varepsilon) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + \varepsilon)$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + \varepsilon) \leqslant \prod_{i=1}^{n} (s_{i,i} + \varepsilon)$ et on conclut en faisant tendre ε vers 0.

Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

III.12. Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. $X^T B X = (\Omega X)^T A (\Omega X) > 0$, car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\Omega X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (Ω est orthogonale, donc elle est inversible). Ainsi $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

De plus Ω est orthogonale, donc d'après le cours, $|\det(\Omega)| = 1$. Or, $\det(A) = 1$, donc $\det(B) = \det(\Omega)^2 \det(A) = 1$: on a prouvé que $B \in \mathcal{U}$.

$\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}([A\Omega\Delta]\,\Omega^T) = \mathrm{Tr}(\,\Omega^T [A\Omega\Delta]) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$.

III.13. D'après la question précédente, $\{\mathrm{Tr}(AS) \setminus A \in \mathcal{U}\} \subset \{\mathrm{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$.

Réciproquement, soit $B \in \mathcal{U}$. On pose $A = \Omega B\, \Omega^T$. En adaptant la démonstration de la question précédente, on montre que $A \in \mathcal{U}$ et que $\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$, donc $\{\mathrm{Tr}(AS) \setminus A \in \mathcal{U}\} = \{\mathrm{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$.

Prenons $x \in \{\mathrm{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$. Il existe $B \in \mathcal{U}$ telle que $x = \mathrm{Tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_{i,i}$. Mais $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc d'après 3.b, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $B_{i,i} > 0$. Ainsi $x > 0$. Ceci prouve que $\{\mathrm{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Elle possède donc une borne inférieure.

III.14. Par application de l'inégalité arithmético-géométrique,

on obtient $\dfrac{1}{n}\mathrm{Tr}(B\Delta) = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i} \right)^{1/n}$, ce qui fournit l'inégalité demandée.

III.15. Soit $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$. D'après la question 11, $\prod_{i=1}^{n} b_{i,i} \geqslant \det(B) = 1$, donc $\left(\prod_{i=1}^{n} b_{i,i} \right)^{1/n} \geqslant 1$.

Ainsi, d'après la question précédente, $\mathrm{Tr}(B\Delta) \geqslant n \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^{1/n} = n(\det(S))^{1/n}$.

III.16. Ainsi $n(\det(S))^{1/n}$ est un minorant de $\{\mathrm{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$, or la borne inférieure est le plus grand des minorants, donc $m \geqslant n(\det(S))^{1/n}$.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $X^T D X = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^2 > 0$, donc $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

De plus $\det(D) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i = \dfrac{\det(S)}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = 1$, donc $D \in \mathcal{U}$. Or $\mathrm{Tr}(D\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_i = n(\det(S))^{1/n}$, donc $m = n(\det(S))^{1/n}$.

Fin du corrigé

Exercice 1 (*** I)**.** On rappelle que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques telles que toutes les valeurs propres sont positives. Ce qui est équivalent à $\forall X \quad {}^t X A X \geqslant 0$.

1. Soit A une matrice carrée réelle de format n et $S = {}^t A A$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

2. Réciproquement, montrer que pour toute matrice S symétrique positive, il existe une matrice A carrée réelle de format n telle que $S = {}^tAA$. A-t-on l'unicité de A ?
3. Montrer que S est définie positive si et seulement si A est inversible.
4. Montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}(S)$.
5. (Racine carrée d'une matrice symétrique positive) Soit S une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.

Correction 1. 1. ${}^tS = {}^t({}^tAA) = {}^tA^t({}^tA) = {}^tAA = S$. Donc $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX = {}^tX^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|_2^2 \geqslant 0$. Donc $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).}$$

2. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe P dans $O_n(\mathbb{R})$ et D dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PD^tP$.
Posons $D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Puisque S est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, D est dans $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$ et on peut poser $D' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$ de sorte que $D'^2 = D$. On peut alors écrire
$$S = PD^tP = PD'D'^tP = {}^t(D^tP)D'^tP,$$
et la matrice $A = D'tP$ convient.
$$\boxed{\forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/\ S = {}^tAA.}$$
On a aussi ${}^t(-A)(-A) = S$ et comme en général $-A \neq A$, on n'a pas l'unicité de la matrice A.
3.
$$\begin{aligned} S \text{ définie positive} &\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXSX > 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \|AX\|_2^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ AX \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker}A = \{0\} \Leftrightarrow A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$
4. Montrons que les matrices A et S ont même noyau. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$$X \in \text{Ker}A \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow SX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}S,$$
et
$$X \in \text{Ker}S \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^tX^tAAX = 0 \Rightarrow {}^t(AX)AX = 0 \Rightarrow \|AX\|_2^2 = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}A.$$
Ainsi, $\text{Ker}({}^tAA) = \text{Ker}(A)$ et en particulier, grâce au théorème du rang, on a montré que
$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(A).}$$
5. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Existence. D'après le théorème spectral, il existe $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $D_0 \in \mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $S = P_0D_0{}^tP_0$.
Posons $D_0 = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des réels positifs puis $\Delta_0 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$ et enfin $R = P_0\Delta_0{}^tP_0$. La matrice R est orthogonalement semblable à une matrice de $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$ et est donc un élément de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Puis
$$R^2 = P_0\Delta_0^{2t}P_0 = P_0D_0{}^tP_0 = S.$$

Unicité. Soit M un élément de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = S$.

M est diagonalisable d'après le théorème spectral et donc $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \underset{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)}{\oplus} E_M(\lambda)$. Mais si λ est une valeur propre de M, $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) \subset \mathrm{Ker}(M^2 - \lambda^2 I_n) = \mathrm{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$. De plus, les valeurs propres de M étant positive, les λ^2, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts ou encore les $\mathrm{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts.

Ceci montre que pour chaque $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$ et que les λ^2, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, sont toutes les valeurs propres de S.

Ainsi, nécessairement la matrice ${}^tP_0 M P_0$ est une matrice diagonale D. L'égalité $M^2 = S$ fournit $D^2 = D_0$ puis $D = \Delta_0$ (car $D \in \mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$) et finalement $M = R$.

$$\boxed{\forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists! R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) /\ R^2 = S.}$$

Exercice 2. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AU) \leqslant \mathrm{tr}A$.
a) Déterminer le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
b) Soit $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(xB) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
c) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
d) Etudier la réciproque.
e) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = SU$.

Correction 2. a) On démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ en effet , si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors

$$(A \mid B) = tr({}^tAB) = tr(AB) = (B \mid A) = tr({}^tBA) = tr(-BA)$$

donc nul.Donc les espaces sont orthogonaux. Les dimensions des sous espaces sont $\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}$ (pour une matrice antisemétrique les termes diagonaux sont nuls.) On donc l'égalité recherchée.
b) On a

$${}^texp(xB)exp(xB) = exp({}^t(xB))exp(xB) = exp(-xB)exp(xB) = exp((x-x)B)$$

cette dernière égalité est vraie car les matrices commutent (attention
$exp(A+B) = exp(A)exp(B)$ quand A et B commutent est à la limite du programme)
donc $exp(B) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
c) La propriété de l'énoncé se traduit par $x \mapsto tr(Aexp(xB))$ admet un maximum en 0 donc $f'(0) = 0$, donc $tr(AB) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ c'est à dire A est symétrique car orthogonal à toutes les matrices antisymétriques. Le théorème spectral donne

$$\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\, A = {}^tPDP$$

où D est une matrice diagonale. On change tous les signes de la diagonale en considérant V=diag$(\varepsilon_1, .., \varepsilon_n)$ où $\mid \varepsilon_i \mid = 1$ et $\varepsilon_i\lambda_i = \mid \lambda_i \mid$ alors $U = PV{}^tP$ est orthogonale et

$$tr(AU) = tr({}^tPDP{}^tPVP) = tr(DV) = \mid \lambda_1 \mid + \cdots + \mid \lambda_n \mid$$

or $tr(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$
la propriété $tr(AU) \leqslant tr(A)$ impose $\forall i\ \lambda_i \geqslant 0$.La matrice est symétrique positive.
d) Supposons $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on utilise encore le théorème spectral $A = {}^tPDP$ où est une diagonale positive. Soit $U \in \mathbb{O}_n(\mathcal{R})$, alors $tr(AU) = tr(DV)$ où $V = (v_{i,j}) = {}^tPUP$ (toujours orthogonale)

$$tr(DV) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_{i,i} \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i = tr(A)$$

car tous les coefficients d'une matrice orthogonale sont $\leqslant 1$
e) L'application réelle $f : V \mapsto tr(MV)$ est continue sur le compact $\mathbb{O}_n(\mathcal{R})$ admet donc un minimum , atteint en U_0
alors pour tout V orthogonale

$$tr(MV) \leqslant tr(MU_0)$$

Si on pose $A = MU$, on aura pour tout W orthogonale

$$tr(AW) \leqslant tr(A)$$

d'après les questions précédentes $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et ainsi $M = AU^{-1}$ où A est symétrique positive et U^{-1} orthogonale.

Exercice 3 (*** I Matrices et déterminants de Gram)**.** Soit E un espace préhilbertien réel.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, ..., x_n)$ dans E^n, on pose $G(x_1, ..., x_n) = (x_i|x_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (matrice de Gram) puis $\gamma(x_1, ..., x_n) = \det(G(x_1, ..., x_n))$ (déterminant de Gram).

1. Montrer que $\text{rg}(G(x_1, ..., x_n)) = \text{rg}(x_1, ..., x_n)$.
2. Montrer que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1, ..., x_n) = 0$ et que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1, ..., x_n) > 0$.
3. On suppose que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre dans E. On pose $F = \text{Vect}(x_1, ..., x_n)$. Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d(x, F)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|^2$). Montrer que $d(x, F) = \sqrt{\frac{\gamma(x,x_1,...,x_n)}{\gamma(x_1,...,x_n)}}$.

Correction 3. 1. Soit $F = \text{Vect}(x_1, ..., x_n)$ et $m = \dim F$. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une base orthonormée de F puis M la matrice de la famille $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ dans la base $\mathcal{B}$ .M est une matrice rectangulaire de format (m, n).
Soit $(i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$. Puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, le coefficient ligne i, colonne j de la matrice ${}^tMM$ est

$$\textstyle\sum_{k=1}^m m_{k,i}m_{k,j} = (x_i|x_j),$$

et on a donc

$$G(x_1, x_2, ..., x_n) = {}^tMM.$$

Puisque $\text{rg}(x_1, ..., x_n) = \text{rg}M$, il s'agit de vérifier que $\text{rg}({}^tMM) = \text{rg}M$. Pour cela, montrons que les matrices M et ${}^tMM$ ont même noyau.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $X \in \text{Ker}M \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}({}^tMM)$ et aussi

$$X \in \text{Ker}({}^tMM) \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^t(MX)MX = 0 \Rightarrow \|MX\|_2^2 = 0 \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}M.$$

Finalement, $\text{Ker}({}^tMM) = \text{Ker}M$ et donc, d'après le théorème du rang, $\text{rg}(x_1, ..., x_n) = \text{rg}M = \text{rg}({}^tMM) = \text{rg}(G(x_1, x_2, ..., x_n))$.

$$\boxed{\text{rg}(G(x_1, x_2, ..., x_n)) = \text{rg}(x_1, \ldots, x_n).}$$

2. D'après 1),

$$(x_1, ..., x_n) \text{ liée} \Leftrightarrow \text{rg}(x_1, x_2, ..., x_n) <\Leftrightarrow \text{rg}G(x_1, x_2, ..., x_n) < n \Leftrightarrow G(x_1, x_2, ..., x_n) \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$$
$$\Leftrightarrow \gamma(x_1, x_2, ..., x_n) = 0.$$

De plus, quand la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ libre, avec les notations de la question 1), on a $m = n$ et la matrice M est une matrice carrée. On peut donc écrire

$$\gamma(x_1, x_2, ..., x_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM) \times \det(M) = (\det M)^2 > 0.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(x_1, ..., x_n) \text{ liée} \Leftrightarrow \gamma(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ (x_1, ..., x_n) \text{ libre} \Leftrightarrow \gamma(x_1, \ldots, x_n) > 0.\end{array}}$$

3. **1ère solution.** Soit x un vecteur de E et $p_F(x)$ son projeté orthogonal sur F. Dans la première colonne de $\gamma(x, x_1, \ldots, x_n)$, le théorème de Pythagore permet d'écrire (puisque $x - p_F(x) \in F^\perp$)

$$\begin{pmatrix} (x|x) \\ (x|x_1) \\ \vdots \\ (x|x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 \\ (x - p_F(x) + p_F(x)|x_1) \\ \vdots \\ (x - p_F(x) + p_F(x)|x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2 \\ (p_F(x)|x_1) \\ \vdots \\ (p_F(x)|x_n) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \|x - p_F(x)\|^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (p_F(x)|p_F(x)) \\ (p_F(x)|x_1) \\ \vdots \\ (p_F(x)|x_n) \end{pmatrix}$$

Après avoir remplacé aussi en première ligne les $(x|x_i)$ par $(p_F(x)|x_i)$, on obtient par linéarité par rapport à la première colonne

$$\gamma(x, x_1, x_2, ..., x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, ..., x_n) + \gamma(p_F(x), x_1, x_2, ..., x_n)$$

Maintenant, $p_F(x)$ est dans F et donc la famille $(p_F(x), x_1, x_2, ..., x_n)$ est liée puis d'après la question 2) $\gamma(p_F(x), x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Il reste $\gamma(x, x_1, x_2, ..., x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, ..., x_n)$ et en développant suivant la première colonne, on obtient

$$\forall x \in E,\ \gamma(x, x_1, \ldots, x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, ..., x_n) = \|x - p_F(x)\|^2 \gamma(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Finalement

$$\boxed{\|x - p_F(x)\| = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, x_2, ..., x_n)}{\gamma(x_1, x_2, ..., x_n)}}.}$$

2ème solution. Posons $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ puis $d = \|x - p_F(x)\|$ de sorte que

$$d^2 = (x - p_F(x))|(x - p_F(x)) = (x - p_F(x))|x = \|x\|^2 - (x|p_F(x)).$$

D'autre part, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, $x|x_i = (x - p_F(x)|x_I) + (p_F(x)|x_i) = (p_F(x)|x_i)$. Par suite, les $n + 1$ réels d^2, λ_1,..., λ_n sont solutions du système d'équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{rl} d^2 + & \lambda_1(x|x_1) + \ldots + \lambda_n(x|x_n) = \|x\|^2 \\ & \lambda_1(x_1|x_1) + \ldots + \lambda_n(x_1|x_n) = (x|x_1) \\ & \vdots \\ & \lambda_1(x_n|x_1) + \ldots + \lambda_n(x_n|x_n) = (x|x_n) \end{array}\right.$$

Le déterminant de ce système vaut $\gamma(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ et le système est de Cramer. Le déterminant associé à d^2 est $\gamma(x, x_1, x_2, ..., x_n)$ et les formules de Cramer refournissent

$$d^2 = \frac{\gamma(x, x_1, \ldots, x_n)}{\gamma(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Exercice 4 (*** I)**.** Montrer que la matrice de Hilbert $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est définie positive.

Correction 4. La matrice H_n est symétrique réelle. Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
{}^tXH_nX &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{x_ix_j}{i+j-1} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j \int_0^1 t^{i+j-2}\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_jt^{i+j-2}\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_it^{i-1}\right)^2 dt \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

De plus, si $X \neq 0$, le polynôme $\sum_{i=1}^n x_iY^{i-1}$ n'est pas le polynôme nul et donc, puisqu'un polynôme non nul admet un nombre fini de racines, la fonction $t \mapsto \left(\sum_{i=1}^n x_it^{i-1}\right)^2$. Ainsi, la fonction $t \mapsto \left(\sum_{i=1}^n x_it^{i-1}\right)^2$ est continue positive et non nulle sur $[0,1]$ et on en déduit que $\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_it^{i-1}\right)^2\ dt > 0$. On a montré que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXH_nX > 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la matrice } H_n \text{ est symétrique définie positive.}}$$