1 pour mardi

Ancien exercice de la banque
Donner quatre théorèmes qui permettent de démontrer qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et illustrer chaque méthode par un exemple concret de $\mathbb{R}^2$.
On utilisera au moins une fois les suites, au plus une fois le passage au complémentaire. Ne pas utiliser que $\mathbb{R}^2$ et $\emptyset$ sont des parties fermées.

2 Pour mercredi

exercice 44-45 de la banque

3 Pour jeudi

On désigne par $p1$ et $p2$ les applications coordonnées de $\mathbb{R}^2$ définies par $p_i(x_1, x_2) = x_i$
(a) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$, montrer que $p1(O)$ et $p2(O)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
(b) Soit. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}, \mid 2xy = 1\}$. Montrer que H est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et que $p1(H)$ et $p2(H)$ ne sont pas des fermés de $\mathbb{R}$.
(c) Montrer que si F est fermé et que $p2(F)$ est borné, alors $p1(F)$ est fermé.

4 Pour Vendredi

On considère l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pourra utiliser librement dans cet exercice que l'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q5. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Q6. Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Q7. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier que:

$$\exists \rho > 0, \quad \forall \lambda \in]0, \rho[, \quad M - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Q8. Application :

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que les matrices $A.B$ et $B.A$ ont le même polynôme caractéristique.
A l'aide des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, prouver que le résultat n'est pas vrai pour les polynômes minimaux.

Q9. Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
On rappelle que l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est une partie connexe par arcs.